计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行　苏维宜　任福贤

上海科学技术出版社

计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行　苏维宜　任福贤

上海科学技术出版社

计算数学丛书

沃尔什函数理论与应用

郑维行　苏维宜　任福贤

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 9.75　字数 216000

1983 年 4 月第 1 版　1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 1— 9,000

统一书号：13119 1063　　定价：（科四）0.91 元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

目　录

附注：有 * 号的章节为理论性稍深的内容，初读时可略去。

引　言

Walsh 函数是美国数学家 J. L. Walsh 于 1923 年引进的[24]，每个函数仅取 +1 与 -1 两值，图形呈方波形，它们的全体构成单位区间 [0,1) 上的完整标准直交系。这个系的性质与三角系颇为相似，例如奇偶性、零点个数、直交展开、Parseval 公式等等，加之方波明显地反映脉冲系统的特点，因此在应用上 Walsh 函数系十分吸引人。1922 年德国数学家 H. Rademacher 已得到 Rademacher 函数系[18]，它虽然有许多类似的特性，但不是完整的直交系，而仅是 Walsh 函数系的一个真子集。

Walsh 函数系原是依所谓列率排序的，S. Kaczmarz[11]后来也使用这一顺序，人们常称为 Walsh-Kaczmarz 序。近来 H. F. Harmuth 又依奇偶性将它们分为 Cal（来自 Cosine-Walsh）与 Sal（来自 Sine-Walsh）两类函数[10]，为工程技术上所常用。1931 年 R. E. A. C. Paley[15] 利用 Rademacher 函数与数的二进表示，建立了 Walsh 函数系的另一种顺序，即自然序。两种顺序的联系可以通过 Gray 码得到，这是由 F. Pichler 给出的。

定义 Walsh 函数的方法有很多种，例如利用递推公式、Hadamard 矩阵以及对称方法等等。

关于 Walsh 级数（Walsh-Fourier 级数）的收敛性、求和法等性质，除了 Walsh 自己与 Paley 以外，后来还有 S. Kaczmarz 与 H. Steinhaus[20]、S. Yano[26-27] 与 G. M. Mor-

genthaler[14] 等的研究。

1949—1950 年 N. J. Fine[8-9] 引进了 Walsh 变式，特别是他把 Walsh 函数与一个可换二进群的特征联系起来，利用 Haar 积分作为工具，揭示了在群上讨论这种函数系的方向。1955 年 N. E. Chrestenson[7] 把 Walsh 函数系推广到整数 $p>2$ 情形，同年 R. G. Selfridge[19] 把广义 Walsh 函数推广到 p 进群情形。

另一方面，用 Walsh 多项式作最佳逼近的文章也相继出现，如 S. Yano[25], V. M. Kokilasvili[13], C. Watari[22-23] 等，后者在七十年代初建立了相应的 Jackson 与 Bernstein 定理。

由于六十年代末七十年代初半导体技术与集成电路的快速发展，使 Walsh 函数的产生与应用有了物质基础，形成了发展的新阶段。引向电讯工程方面的首推 Harmuth[10]。此后被广泛地应用于信息论、线性系统论、通讯、电视等方面，而在雷达、计算机、遥测、光学等领域中的应用也在研究中。据 J. N. Bramhall[2] 在 1973 年的统计，从 1893—1972 年的 80 年中，有关 Walsh 函数的理论与应用的文章共 606 篇，其中 1960 年后发表的竟达 546 篇之多，并且应用方面几乎占 80%。Harmuth 是应用 Walsh 分析的大力提倡者。他曾说，预计 Walsh 分析的研究将引起一场革命，就象 17—18 世纪牛顿的微积分那样。

J. E. Gibbs 于 1969 年引进了定义在二进群上函数的逻辑导数概念，此后于 1973 年 P. L. Butzer 与 H. J. Wagner[3-5] 进一步讨论了逻辑导数的性质并应用到函数逼近的问题上。1976 年我们在讨论班里将逻辑导数概念推广到 $p>2$、基本集为 p 进局部紧群 $[0,\infty)$ 情形并且得到有关逼近论的结果，如 Bernstein 型定理，一个变分引理与一类极值问题的解[30-33]，

1979年将某些结果推广到多元情形[34]，最近又得到有关逼近恒同核的一系列结果，这些便给 Walsh 分析的深入研究创造了条件。

本书将讨论 Walsh 函数的一些基本性质与应用，使读者能了解 Walsh 函数的特点并能独立地应用它们。对数学基础较好的读者也可以在某些课题上得到深入。下面将用几个例子提出一些有趣的现象，借以点明本书中某些论题。

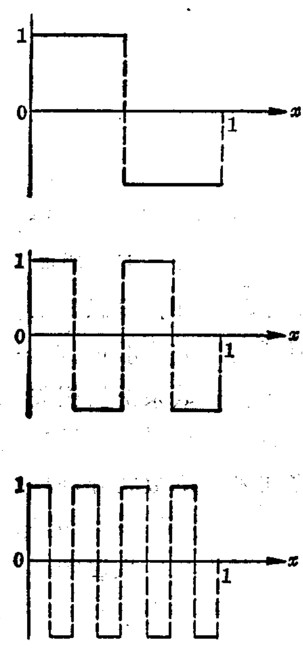


图 0.1

首先考察 Rademacher 函数系(简称R系)。它是周期为1的标准直交系。系中的函数在[0, 1)上的定义如下：

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/2,\\ -1, & 1/2\leqslant x<1,\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\varphi_0(2x),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(2^n x),$$

$$\cdots\cdots$$

这是熟知的开关函数，首三个函数的图形如图 0.1 所示。显然，把常数1添加进去，所得的系$\{1,\varphi_0,\varphi_1,\cdots\}$仍是[0,1)上的标准直交系。现在令

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/4,\\ -1, & 1/4\leqslant x<3/4,\\ 1, & 3/4\leqslant x<1。\end{cases}$$

计算结果给出

$$\int_0^1 1\cdot f(x)dx=\frac{1}{4}(1-1-1+1)=0,$$

$$\int_0^1 \varphi_0(x)f(x)\,dx=\frac{1}{4}(1\cdot 1+1(-1)$$

$$+(-1)(-1)+(-1)\cdot 1)=0_{\circ}$$

一般地，当 $n\geqslant 2$ 时，注意到 $\varphi_{n-2}(x)=\varphi_0(2^{n-2}x)$ 与 1 的直交性，有

$$\int_0^1\varphi_n(x)\,f(x)\,dx=\int_0^{1/4}\varphi_0(2^nx)\,dx-\int_{1/4}^{3/4}+\int_{3/4}^1$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\varphi_0\,(2^{n-2}t)\,dt-\frac{1}{4}\int_1^2-\frac{1}{4}\int_2^3+\frac{1}{4}\int_3^4=0_{\circ}$$

这样，存在一个非零函数 f，它与系 $\{1,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots\}$ 中每个函数直交。这个事实说明，R 系是不完整的(完整性概念见第一章 § 2)。因而，要想表示任意的周期信号，只用 R 系是不行的。但开关函数的形状、性态非常引人注目，许多周期脉冲信号都与这种函数系密切相关，那么能否对它适当加以改造，使之确能表示任意周期信号？这就将引出 R 系的完整化问题以及随之而来的函数展开、收敛性等问题。读者将会看到，Walsh 函数系(简称 W 系)正是这种完整化的结果。

其次我们来看图 0.2 中的各种格子图案，可以用它们的适当组合来表示“工”字。图中带有阴影的位置算作 +1，空白的算作 -1。表示的方法是，将 1—8 号的图案代表的二元函数依次记成 $u_1(x,y)$，$u_2(x,y)$，$\cdots$，$u_8(x,y)$，并分别乘上系数 4，12，-4，4，4，-4，-4，4，然后相加，所得结果除以 16 便得到函数 $f(x,y)$，它代表图中的“工”字：

$$f(x,y)=\frac{1}{16}\{4u_1(x,y)+12u_2(x,y)-4u_3(x,y)$$

$$+4u_4(x,y)+4u_5(x,y)-4u_6(x,y)$$

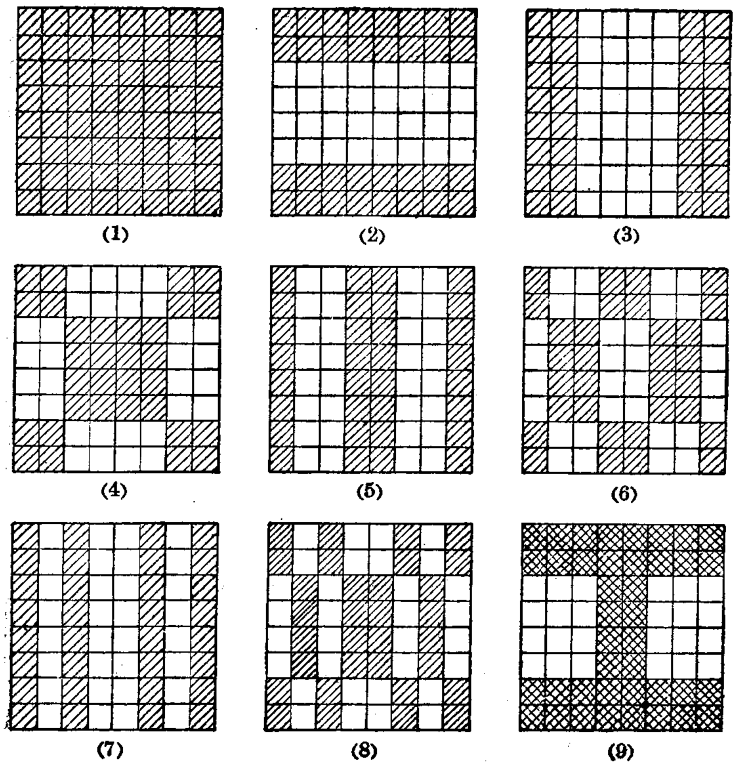


图 0.2

$$-4u_7(x,y)+4u_8(x,y)\}。$$

这些图案中的函数与我们的 W 函数有什么关系，怎样通过它们显示出所需的图象？此外，当某种电讯号给出后如何通过W函数进行传输？读者可以在第二章的末尾找到问题的答案。

最后我们提一下W系与三角系的一些类似之处。Harmuth 曾将列率序二进W系 $\{wal_k(x)\}$ 依奇偶对称性分成两组：

$$\text{cal}_0(x),\ \text{cal}_1(x),\ \cdots,\ \text{cal}_n(x),\ \cdots,\ wal_{2k}(x)=\text{cal}_k(x);$$

$$\text{sal}_1(x),\ \text{sal}_2(x),\ \cdots,\ \text{sal}_n(x),\ \cdots,\ wal_{2k-1}(x)=\text{sal}_k(x),$$

它们正好与余弦函数、正弦函数分别相应。并且周期为 1 的信号 $f(x)$ 可以展成象 Fourier 级数那样的级数：

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\text{cal}_n(x)+b_n\text{sal}_n(x)\},$$

其中

$$a_n=\int_0^1 f(x)\text{cal}_n(x)dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$b_n=\int_0^1 f(x)\text{sal}_n(x)dx,\quad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

在W系中，有类似于三角系的乘法公式：

$$\text{cal}_m(x)\text{cal}_n(x)=\text{cal}_{m\oplus n}(x),$$

$$\text{sal}_m(x)\text{cal}_n(x)=\text{sal}_{(m-1)\oplus n+1}(x),$$

$$\text{sal}_m(x)\text{sal}_n(x)=\text{cal}_{(m-1)\oplus(n-1)}(x),$$

这里记号 $\oplus$ 表示数的伪加运算(参看第一章 § 1)。两个系的详细比较将在第四章中给出。这里我们仅提出一个较有趣的问题。大家知道，余弦函数、正弦函数可微分任意多次，但这种微分运算对 cal、sal 函数引起的结果是一切化为零。看来牛顿首创的微积分对这种函数系很难保持神圣的力量。那么，W函数能否进行“微分”呢？读者将会看到，如果引进一种新的“导数”概念，这种方波函数也可以进行微分运算。这时有

$$D^{(1)}\{wal_k(x)\}=kwal_k(x),$$

对 $wal_k(x)$ 求一阶“导数”相当于乘以序号 k。这与普通导数公式

$$D\{e^{ikx}\}=ike^{ikx}$$

颇为类似。事实上这种“导数”在 Walsh 分析中将扮演一个极为重要的角色。

上述两种函数系的类似性是表面上的，还是带有实质性的？怎样引进新的“导数”概念？它有什么新的特点？读者欲知道它的解答，可阅读第四、第六章的论述。

Walsh 分析与应用是近二、三十年才发展起来的。从 Walsh 发表他的开创性文章[24]算起，距今还不到 60 年，现在正显示出年轻的生命力，以新的姿态活跃在科技领域中。可以期望，在理论与应用两方面它将为人们展现更为广阔的前景。

关于沃尔什(Walsh)函数的理论与应用，材料很多，大部分散见于各种杂志与会议录之中，从数学的观点写成一本书尚不多见。本书希望能作为计算数学、数学、物理专业高年级大学生、研究生的读物，其中基本内容部分也可供应用数学工作者、工程技术人员参考。

本书共分六章。第一章是预备知识，§ 3 初读时可以略去，§ 4 列举的结果便于读者查阅。第二章介绍 Walsh 函数及其性质，包括逼近定理与 Walsh 函数系完整性的证明，这章是全书的理论基础。第三章是有限 Walsh 变换，给出W矩阵、H矩阵以及它们之间的关系，为以后讲快速W变换做准备。在已讲内容的基础上，把 Walsh 函数系与三角系的比较列入第四章，这里还特别介绍了逻辑导数与逻辑积分概念。第五章是快速W变换及应用，给出快速算法与证明，所述应用则是较简单的，目的是使读者有个初步了解。最后一章讨论无限区间上 Walsh 变式，引进一般逻辑导数概念及其性质，还给出简单的 Walsh 变式表，以便读者能对 Walsh 变式与 Fourier 变式作简单的对照。§ 5 与 § 6 的内容较为困难，是为有特殊兴趣的读者安排的。书中介绍的某些内容是作者自己的工作，详见书末参考文献。每章末附有少量习题，借以帮助了解

内容。对于只打算初步了解 Walsh 函数的读者及一般工程技术人员，可以在看完引言与第一章 § 1、§ 2 之后，接着读第二章 § 1—§ 4、§ 7，然后阅读第三章、第四章的 § 1—§ 6，第五章以及第六章的 § 1、§ 2、§ 4。

本书是在 1976 年与 1977 年的讲义基础上形成的，在教学中曾用过两次。作者衷心感谢程民德、徐利治、沈燮昌三位教授对本书初稿提出了许多宝贵的意见，作者还要感谢杨洽、储宗正二位先生，他们为本书提供了应用部分的材料。我们热忱欢迎广大读者对本书提出建议与批评。

作　者　1980 年 1 月于南京

第 1 章

预备知识

Walsh 函数系（W 系）是基本区间 $[0, 1)$ 上的完整标准直交系，它与三角系很类似。如果读者对三角系比较熟悉，不妨利用它来帮助学习W系。本书将尽量做到内容上自给自足。这样，即使读者不大熟悉三角系的知识，也可以顺利阅读。在定义W函数时，需要数的二进表示、Gray 码、直交系等预备知识，下面就来介绍它们。为了对W系有进一步的了解，还简要地介绍群及其特征群的概念。在最后一节中，我们收集了书中用到的有关实变函数论的一些结果。

§1　二进制数的伪加法，Gray 码

首先介绍数的二进表示与伪加法。设 α 是一个非负实数，我们可以将它写为二进表示：

$$\alpha = (\alpha_{-(N-1)}\alpha_{-(N-2)}\cdots\alpha_{-1}\alpha_0;\ \alpha_1\alpha_2\cdots), \tag{1.1}$$

其中 $\alpha_j(j=-N+1, -N+2, \cdots)$ 为 0 或 1。也可以把 α 写为依 2 的乘幂展开的级数：

$$\alpha = \sum_{j=-N+1}^{\infty} \alpha_j 2^{-j}。 \tag{1.2}$$

由 (1.2) 可见，α_j 中带有非正足标的数字对应于 α 的整数部分，而带有正足标的数字对应于 α 的小数部分，两者之间用分号隔开。有时也把 α 简写为 $\alpha=(\alpha_j)$。

二进制数可分为二进有理数与二进无理数两类。一个实

数，它的二进表示中若从某位数字开始全是0或全是1的，称为**二进有理数**，其余的数称**二进无理数**。例如，$\frac{1}{2}$有表示(0; 1000…)或(0; 0111…)，$\frac{5}{8}$有表示(0; 101000…)或(0; 100111…)，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$都是二进有理数。而$\frac{1}{3}$=(0; 010101…)与π等都是二进无理数。在二进有理数的表示中，从某位数字开始全是0的，称为**有尽表示**，这时在写法上可以将这些0略去。对于二进有理数，本书恒采用有尽表示。例如，$\frac{1}{2}$=(0; 1)，$\frac{5}{8}$=(0; 101)。容易看出，若α是二进无理数，它的二进表示中一定出现无穷多个0与无穷多个1。

负数的二进表示为它的绝对值的表示添上负号。

今后将一个数写成二进表示时，总是用一圆括号括起来，并且对于整数，我们略去小数点处的分号。例如，19=(10011)，6.75=(110; 11)。

Walsh-Fourier 分析简称为 ***W* 分析**。其中最基本的一种运算是二进制数的伪加法。伪加运算用记号⊕表示。两个元的集{0, 1}上的**基本伪加运算**规定如下：

$$0\oplus0=0,$$
$$0\oplus1=1,$$
$$1\oplus0=1,$$
$$1\oplus1=0,$$

表 1.1

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

亦即，同数伪加得0，异数伪加得1，参看表1.1。

在一般情形，两个非负实数$\alpha=(\alpha_j)$，$\beta=(\beta_j)$的**伪加**定义为

$$\alpha\oplus\beta=(\alpha_j\oplus\beta_j)。\qquad(1.3)$$

也就是，α与β的伪和$\alpha\oplus\beta$是这样的一个实数，它的二进表

示的第 j 位数字是 α、β 的二进表示的相应（第 j 位）数字的伪和。通常我们先求得 $\alpha\oplus\beta$ 的二进表示，然后再转换成十进制数。例如，

$$5\oplus7=(101)\oplus(111)=(010)=2,$$

$$10\oplus3=(1010)\oplus(0011)=(1001)=9,$$

$$14.5\oplus7.25=(1110;\ 1)\oplus(111;\ 01)$$
$$=(1001;\ 11)=9.75。$$

注意，任意两数的伪加法与平常的模 2 加法意义不同。大家知道，依模 2 加法，$5+7=0\ (\mathrm{mod}\,2)$，而 $5\oplus7=2$。但限制在基本集 $\{0,\ 1\}$ 中时，两者结果是相同的。

不难验明，一切非负数的集合，对伪加运算构成一个 Abel 群，参见本章 § 3。

现在我们来介绍非负整数的 Gray 码，这在以后定义 W 函数时要用到。设 k 为非负整数，它的二进表示为

$$k=(k_{-N+1}k_{-N+2}\cdots k_0)。\tag{1.4}$$

把它看成一个 N 维向量。先写出 $N+1$ 维向量$(0\ k_{-N+1}\ k_{-N+2}\ \cdots\ k_{-1}\ k_0)$，再将每相邻两个分量进行伪加得一 N 维向量$(0\oplus k_{-N+1}\ \ k_{-N+1}\oplus k_{-N+2}\ \cdots\ k_{-1}\oplus k_0)$。它就是 k 的 **Gray 码**，记成 $G(k)$：

$$G(k)=(k_{-N+1}\ k_{-N+1}\oplus k_{-N+2}\ \cdots\ k_{-1}\oplus k_0)。\tag{1.5}$$

由于 $(0\ k_{-N+1}\ \cdots\ k_{-1})=[k/2]$，这里 [ ] 表示数的整数部分，故 k 的 Gray 码也可以写成公式：

$$G(k)=k\oplus[k/2]。\tag{1.6}$$

反之，如果知道了某个整数 k 的 Gray 码

$$G(k)=(k'_{-N+1}\ k'_{-N+2}\ \cdots\ k'_0)\equiv k',\tag{1.7}$$

则可以证明，$k=(k_{-N+1}\ \cdots\ k_0)$ 的各位数字由公式

$$k_{-j}=k'_{-N+1}\oplus k'_{-N+2}\oplus\cdots\oplus k'_{-j},\tag{1.8}$$

$$j=0, 1, \cdots, N-1$$

给出。称 k 为 k' 的**逆 Gray 码**，记为 $G^{-1}(k')$。

其实，这可用归纳法证明。据 Gray 码的定义，

$$k'_{-j}=k_{-(j+1)}\oplus k_{-j}, \quad j=0, 1, \cdots, N-1, \qquad (1.9)$$

这里约定 $k_{-N}=0$。令 $j=N-1$，显见 $k_{-N+1}=k'_{-N+1}$。假定(1.8)对一切 $j\leqslant N-1$ ($j>0$) 成立，则由 (1.9) 知

$$k_{-j}\oplus k_{-j+1}=k'_{-j+1},$$

故得

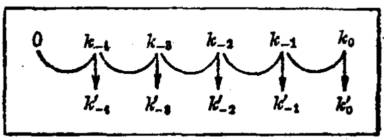
$$\begin{aligned}&k_{-j}\oplus(k_{-j}\oplus k_{-j+1})\\&\quad=(k'_{-N+1}\oplus k'_{-N+2}\oplus\cdots\oplus k'_{-j})\oplus k'_{-j+1},\end{aligned}$$

由于 $k_{-j}\oplus k_{-j}=0$，且伪加运算满足结合律，因此

$$k_{-j+1}=k'_{-N+1}\oplus k'_{-N+2}\oplus\cdots\oplus k'_{-j+1}。$$

这样，等式 (1.8) 对于 $j-1$ 也成立 ($j>0$)。这就证明了(1.8)。

表 1.2　求 Gray 码 ($k'_{-j}=k_{-j-1}\oplus k_{-j}$)



例 1　设 $k=13=(1101)$，求其 Gray 码。

【解】　先写出 (01101)，求得

$G(k)=(0\oplus1, 1\oplus1, 1\oplus0, 0\oplus1)=(1011)=11$。

这个方法可参看表 1.2。

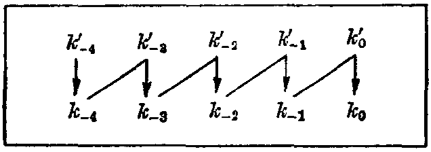
例 2　设 $G(k)=21$，求 k。

【解】　因 $21=(10101)$，由 (1.8) 求得

$$\begin{aligned}k&=(1\ \ 1\oplus0\ \ 1\oplus0\oplus1\ \ 1\oplus0\oplus1\oplus0\ \ 1\oplus0\oplus1\oplus0\oplus1)\\&=(11001)=25。\end{aligned}$$

这个方法可参看表 1.3。

表1.3 由 $G(k)$ 求 k, $k_{-j}=k_{-j-1}\oplus k'_{-j}$



例3 设 n 为自然数，求 2^n-1 的 Gray 码。

【解】 由于 $2^n-1=(\overbrace{11\cdots1}^{n})$，故据 (1.5) 求得

$$G(2^n-1)=(1\overbrace{0\cdots0}^{n-1})=2^{n-1}。$$

我们把 0 到 15 各数的 Gray 码列成下表：

表 1.4

数	二进制向量	Gray 码	Gray 码对应的数	数	二进制向量	Gray码	Gray 码对应的数
0	(000)	(000)	0	8	(1000)	(1100)	12
1	(001)	(001)	1	9	(1001)	(1101)	13
2	(010)	(011)	3	10	(1010)	(1111)	15
3	(011)	(010)	2	11	(1011)	(1110)	14
4	(100)	(110)	6	12	(1100)	(1010)	10
5	(101)	(111)	7	13	(1101)	(1011)	11
6	(110)	(101)	5	14	(1110)	(1001)	9
7	(111)	(100)	4	15	(1111)	(1000)	8

关于二进非负整数的 Gray 码，有下列性质：

性质 1° $G(\alpha\oplus\beta)=G(\alpha)\oplus G(\beta)$。

性质 2° **首 2^N 个非负整数的 Gray 码，实现此数集自身的变换，且变换是双向单值的。**

性质 1° 的证明 设 α, β 的二进表示分别为

$$\alpha=(\alpha_{-N+1}\ \alpha_{-N+2}\cdots\alpha_0),$$

$$\beta=(\beta_{-N+1}\ \beta_{-N+2}\cdots\beta_0),$$

这里我们假定两者的位数相同，因为可以在数字最左边补足 0 而不改变数的大小。据定义并注意伪加满足交换律与结合律。有

$$\begin{aligned}G(\alpha\oplus\beta)&=G(\alpha_{-N+1}\oplus\beta_{-N+1}\ \alpha_{-N+2}\oplus\beta_{-N+2}\cdots\alpha_0\oplus\beta_0)\\&=(\alpha_{-N+1}\oplus\beta_{-N+1}\ \alpha_{-N+1}\oplus\alpha_{-N+2}\oplus\beta_{-N+1}\oplus\beta_{-N+2}\\&\quad\cdots\alpha_{-1}\oplus\alpha_0\oplus\beta_{-1}\oplus\beta_0)\\&=G(\alpha)\oplus G(\beta)。\end{aligned}$$

性质 2° 的证明 设首 2^N 个整数的集是

$$A=\{0, 1, 2, \cdots, 2^N-1\}。$$

每个 $\alpha\in A$ (记号$\in$表示属于)的二进表示为

$$\alpha=(\alpha_{-N+1}\ \alpha_{-N+2}\cdots\alpha_0),$$

它对应于一个N维向量,分量取 0 或 1，集A则对应于所有这样的向量的全体。显然，$G(\alpha)$ 仍为同类型的N维向量，故知 $G(\alpha)\in A$。又当 $G(\alpha)=G(\alpha')$ 时，由 (1.8) 与 (1.9) 可知 $\alpha=\alpha'$,故不同的数所对应的 Gray 码也不相同。这就证明了，集A与其 Gray 码之间是一一对应的。

最后简短地介绍一下 p 进数的伪加法与伪减法。设p是大于 1 的整数。任一非负实数 α 的 **p 进表示**为

$$\alpha=(\alpha_{-N+1}\ \alpha_{-N+2}\cdots\alpha_{-1}\ \alpha_0;\alpha_1\ \alpha_2\cdots),$$

它依 p 的乘幂的级数为

$$\alpha=\sum_{j=-N+1}^{\infty}\alpha_j p^{-j},$$

其中 $\alpha_j\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$。与二进制情形类似，$p$ 进有理数有两种表示，其一是从某位数字开始全是 0 (有尽表示)，其二

是从某位数字开始全是 $p-1$。我们恒采用前者。例如，$1/p$ 的表示用 $(0;1)$ 而不用 $(0;0\,p-1\,p-1\cdots)$。

p 个元的集 $\{0,1,\cdots,p-1\}$ 上的**伪加**、**伪减**运算由下表规定：

表 1.5

$\oplus$	0	1	2	$\cdots$	$p-1$
0	0	1	2	$\cdots$	$p-1$
1	1	2	3	$\cdots$	0
2	2	3	4	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p-1$	$p-1$	0	1	$\cdots$	$p-2$

表 1.6

（减数）

（被减数） $\ominus$	0	1	2	$\cdots$	$p-1$
0	0	$p-1$	$p-2$	$\cdots$	1
1	1	0	$p-1$	$\cdots$	2
2	2	1	0	$\cdots$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p-1$	$p-1$	$p-2$	$p-3$	$\cdots$	0

我们看到，在基本集 $\{0,1,\cdots,p-1\}$ 上的伪加、伪减运算相当于模 p 的加、减法。

例如，设 $p=5$，有

$$3\oplus4=2,\quad 1\oplus4=0,\quad 3\ominus4=4,\quad 1\ominus4=2。$$

与二进情形一样，两非负实数 $\alpha=(\alpha_j)$，$\beta=(\beta_i)$ 的**伪加运算**规定为

$$\alpha\oplus\beta=(\alpha_j\oplus\beta_j),$$

而**伪减运算**规定为

$$\alpha\ominus\beta=(\alpha_j\ominus\beta_j)。$$

当 $\alpha=0$ 时，简记 $0\ominus\beta=\ominus\beta$。

容易看出，在二进情形，伪减与伪加同效，因此这时只须考虑伪加就够了。但对 $p\neq2$ 情形，伪加与伪减两种运算是不同的。

例如，设 $p=5$，有

$$38\oplus109=(123)\oplus(414)=(032)=17,$$

$$38\ominus 109=(123)\ominus(414)=(214)=59。$$

关于非负整数k的Gray码，也可与二进情形一样定义，参看(1.5)，但(1.6)应改为

$$G(k)=k\oplus[k/p],$$

并且相应于这一情形的公式(1.8)也成立。所有这些都留给读者自行证明。

§2 直交函数系

设E是n维复向量空间。我们已经知道，E中两个向量$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$与$y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$的内积定义为

$$(x, y)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\bar{\eta}_j,$$

这里$\bar{\eta}_j$表示复数η_j的共轭。向量x的长可用x与自己的内积的算术平方根来表示：

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}=(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{1/2}。$$

称向量x与y直交，如果$(x, y)=0$。在E中给出n个向量$x_1, \cdots, x_n$，如果对任意$j\neq k$，有$(x_j, x_k)=0$，则称这n个向量的系是直交系。如果每个x_j的长为1，则称这个系是标准系。当所述两个条件都满足时，称系$\{x_1, \cdots, x_n\}$是标准直交系，标准直交系一定是线性无关组。

设$\{x_1, \cdots, x_n\}$是E中的标准直交系，那么显然，每个$x\in E$可以依这个系唯一表示出来：

$$x=c_1x_1+\cdots+c_nx_n,$$

其中

$$c_1=(x, x_1), \cdots, c_n=(x, x_n)。$$

并且有

$$\|x\|^2=|c_1|^2+\cdots+|c_n|^2。\tag{1.10}$$

其实，

$$(x,\ x)=(c_1x_1+\cdots+c_nx_n,\ c_1x_1+\cdots+c_nx_n)$$

$$=\sum_{j,k}c_j\bar{c}_k(x_j,\ x_k),$$

由于 $\{x_k\}$ 是标准直交系，当 $j\neq k$ 时 $(x_j,\ x_k)=0$ 且 $(x_k,\ x_k)=1$，故 $(x,\ x)=\sum_k c_k\bar{c}_k=\sum_k|c_k|^2$。

以上所述是向量代数中的一些基本事实。对于函数空间可以引进类似的概念。

现在设 E 是区间 $[a,\ b]$ 上的平方可积函数空间 $L^2_{[a,b]}$。如果对于 E 中两个元 $f,\ g$ 有

$$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx=0,\tag{1.11}$$

则称 f 与 g **直交**。如果 $\int_a^b f(x)\overline{f(x)}dx=1$，则称 f 是**标准的**。若在 E 中给出一个系

$$f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n,\ \cdots,$$

如果每个 f_i 是标准的，且系中任意两个不同函数直交，则称这个系是**标准直交系**。

容易验明，$[0,\ 2\pi]$ 上的三角系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \cdots\tag{1.12}$$

是标准直交系。在引言中所述 $[0,\ 1]$ 上的 R 系 $\{1,\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots\}$ 是标准直交系。本书中将要讨论的 W 系也是标准直交系。

设 $\{f_1,\ f_2,\ \cdots\}$ 是 $L^2_{[a,b]}$ 中的标准直交系，则它的任一子

集都是标准直交系。现在要问，当给定一个标准直交系 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 时，是否可扩充为更大的标准直交系？对此可以引进完整性概念。对给定的函数系 $\{f_1, f_2, \cdots\}$，若不存在非零函数 f 使与一切 f_i 直交，则称系 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是**完整的**。完整性概念是相当重要的，正是对于这样的系，我们才能借以表示任意的周期函数。

设 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是 $L^2_{[a,b]}$ 中的标准直交系，对于 $f, g\in L^2_{[a,b]}$ 引进记号

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx, \tag{1.13}$$

并称之为 f, g 的**内积**。令

$$c_k=(f, f_k), \quad k=1, 2, \cdots, \tag{1.14}$$

称之为 f 的 **Fourier 系数**。作级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k f_k$，称为 f 的 **Fourier 级数**，并记成

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)。 \tag{1.15}$$

关于 Fourier 级数，有下列几条简单性质：

性质 1° 若 $f(x)$ 能展成一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x), \tag{1.16}$$

则 a_k 必是 f 的 Fourier 系数，即此时展式就是 f 的 Fourier 级数。

性质 2° 在多项式 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ 中，与 $f(x)$ 有最小均方误差的是 f 的 Fourier 级数的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(x)$，$c_k$ 由 (1.14) 给定。

性质 3° 有 Bessel 不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2dx。\qquad(1.17)$$

性质 1° 的证明很简单，(1.16) 中级数既然一致收敛，可以将两边同乘 $\overline{f}_j(x)$ 并积分，据标准直交性，即得

$$(f,\ f_j)=a_j(f_j,\ f_j)=a_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots。$$

为证性质 2° 与 3°，先注意函数 f 与 g 的均方误差是指

$$\left\{\int_a^b|f-g|^2dx\right\}^{1/2}=(f-g,\ f-g)^{1/2}。\qquad(1.18)$$

如果引用 f 的范数记号 $\|f\|=(f,\ f)^{1/2}$，(1.18)可记为$\|f-g\|$。现在问题是要证明使均方误差的平方

$$\left\|\sum_1^n a_kf_k-f\right\|^2=\int_a^b\left|\sum_1^n a_kf_k-f\right|^2dx$$

达到最小的那些 a_k 是 $c_k=(f,\ f_k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。据 $\{f_k\}$ 的标准直交性，求出

$$\begin{aligned}\left\|\sum_1^n a_kf_k-f\right\|^2&=\left(\sum_{k=1}^n a_kf_k-f,\ \sum_{k=1}^n a_kf_k-f\right)\\&=\sum_{k=1}^n|a_k|^2+\|f\|^2-\sum_{k=1}^n a_k(f_k,\ f)-\sum_{k=1}^n(f,\ a_kf_k)。\end{aligned}$$

因 $(f,\ f_k)=c_k$，故 $(f_k,\ f)=\int_a^b f_k\overline{f}dx=\left(\int_a^b f\overline{f}_kdx\right)^-=\overline{c}_k$，

$(f,\ a_kf_k)=\int_a^b f\overline{a}_k\overline{f}_kdx=\overline{a}_kc_k$，于是

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_kf_k-f\right\|^2=\|f\|^2+\sum_{k=1}^n|a_k|^2-\sum_{k=1}^n(a_k\overline{c}_k+\overline{a}_kc_k)。$$

注意到

$$|a_k-c_k|^2=(a_k-c_k)(\overline{a}_k-\overline{c}_k)=|a_k|^2+|c_k|^2-a_k\overline{c}_k-\overline{a}_kc_k,$$

即得

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_kf_k-f\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2+\sum_{k=1}^n|a_k-c_k|^2。$$

右边 $\|f\|^2$ 与 $-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ 两项是确定的，因而当且仅当末项 $\sum_{k=1}^{n}|a_k-c_k|^2$ 为 0 时 $\left\|\sum_{k=1}^{n}a_kf_k-f\right\|^2$ 取最小值，即这时有 $a_k=c_k$，并且最小值为

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}c_kf_k-f\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2. \qquad (1.19)$$

由于 (1.19) 左边总是非负的，故 $\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\geqslant 0$，令 $n\to\infty$ 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\|f\|^2, \qquad (1.20)$$

这就证明了 (1.17)。

当 (1.20) 中等号成立时，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\|f\|^2, \qquad (1.21)$$

系 $\{f_k\}$ 具有特别重要的意义。(1.21)称为 **Parseval 等式**。读者可与 (1.10) 相比较。

回到 (1.19)。若 $\left\|\sum_{k=1}^{n}c_kf_k-f\right\|\to 0\ (n\to\infty)$，则称级数 $\sum c_kf_k$ **平均收敛于 f** 或强收敛于 f。于是由等式(1.19)看出，关于 f 的 Parseval 等式成立相当于 f 的 Fourier 级数部分和 $\sum_{k=1}^{n}c_kf_k$ 平均收敛于 f。

下面讨论 Parseval 等式与完整性之间的关系。为此先建立 Riesz-Fisher 定理：

定理 1 设在平方可积函数空间 $L^2_{[a,b]}$ 中给定一个标准直交系$\{f_1, f_2, \cdots\}$。若复数列 $c_1, c_2, \cdots$ 满足条件 $\sum|c_k|^2<\infty$，则存在唯一的 $f\in L^2_{[a,b]}$，满足：(i) 数 c_k 是 f 关于系 $\{f_k\}$ 的 Fourier 系数；(ii) 关于 f 的 Parseval 等式成立。

证 设 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kf_k(x)$，则当 $m>n$ 时有

$$\|S_m-S_n\|^2=\left(\sum_{k=n+1}^{m}c_kf_k,\ \sum_{k=n+1}^{m}c_kf_k\right)=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2,$$

据假设 $\sum|c_k|^2<\infty$，故当 $m, n\to\infty$ 时，上式右边趋于 0，从而左边趋于 0。这就表明 $\{S_n\}$ 为空间中的基本序列，据 $L^2_{[a,b]}$ 空间的完备性，存在一个 $f\in L^2_{[a,b]}$，适合

$$S_n\xrightarrow{\text{强}}f \quad 或 \quad \|S_n-f\|\to 0 \quad (n\to\infty)。$$

设 k 是任一固定的自然数。则由 Schwarz 不等式（参看本章 §4，(vi) 的 (a)），有

$$|(f, f_k)-(S_n, f_k)|=|(f-S_n, f_k)|\leqslant\|f-S_n\|\cdot\|f_k\|。$$

于是对每个 k，当 $n\to\infty$ 时 $(S_n, f_k)\to(f, f_k)$。但当 $n>k$ 时有 $c_k=(S_n, f_k)$，故 $c_k=(f, f_k)$，这就是说 c_k 是 f 关于系 $\{f_k\}$ 的 Fourier 系数，并且这时，S_n 成为 f 的 Fourier 级数部分和。前面已经说过，S_n 平均收敛于 f 就相当于 Parseval 等式成立。因此只须证明唯一性。如果还有函数 g 也满足定理中的要求 (i) 与 (ii)，则由 (i) 知 f 与 g 的 Fourier 系数相同，再据 (ii)，f 与 g 均是同一个序列 $\{S_n\}$ 的极限，从而 f 与 g 相合。定理全部证毕。

有了定理 1，我们可以证明完整性与 Parseval 等式的等价性：

定理 2 为使标准直交系 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 是完整的，充要条件为对任何 $f\in L^2_{[a,b]}$ 有 Parseval 等式成立。

证 先证充分性。设对每个 $f\in L^2_{[a,b]}$，有 Parseval 等式成立，并设 f 与一切 f_k 直交。则 f 关于这个系的 Fourier 系数 c_k 全为 0，$k=1, 2, \cdots$。这时 Parseval 等式对此 f 表现为下列形式：

$$\|f\|^2=0+0+\cdots。$$

由此显然有 $f=0$。这样,我们推出系 $\{f_k\}$ 是完整的。

反之,为了证必要性,假定 $\{f_k\}$ 是这样的系,对于它存在某个函数 g 使 Parseval 等式不成立。那么 Bessel 不等式应成立严格不等号:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\int_a^b|g(x)|^2dx,\ \ c_k=(g,\ f_k)。$$

据 Riesz-Fisher 定理,存在平方可积函数 $\varphi(x)$,它的 Fourier 系数是 c_k,且有 Parseval 等式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\int_a^b|\varphi(x)|^2dx。$$

令 $r(x)=f(x)-\varphi(x)$,由上面所得两个不等式知 $r(x)$ 不恒等于 0,又 $(r,\ f_k)=(f,\ f_k)-(\varphi,\ f_k)=c_k-c_k=0$,$k=1,\ 2,\ \cdots$。这样,非零函数 r 与一切 f_k 直交,可见 $\{f_k\}$ 不是完整的。于是证明了当 $\{f_k\}$ 为完整时,Parseval 等式对一切 $f\in L^2_{[a,b]}$ 均成立。

作为应用,我们指出三角系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

是 $[0,\ 2\pi]$ 上的完整系。其实,据所证定理,只须验证,对每个 $f\in L^2_{[a,b]}$ 有 Parseval 等式成立。设

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是任意三角多项式,则易知对于它 Parseval 等式成立:

$$\|T\|^2=\frac{\pi}{2}|a_0|^2+\pi|a_1|^2+\pi|b_1|^2+\cdots+\pi|a_n|^2+\pi|b_n|^2,$$

并且因三角多项式集在 $L^2_{[a,b]}$ 空间中是稠密的(稠密的定义见本章 §4),从而 Parseval 等式对 $L^2_{[a,b]}$ 中一切函数成立。于是

据定理 2，系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}$$

是完整的。

同样可以证明，指数函数系

$$\{1,\ e^{2\pi ix},\ e^{-2\pi ix},\ e^{2\cdot 2\pi ix},\ e^{-2\cdot 2\pi ix},\ \cdots\}$$

是 [0, 1] 上的完整标准直交系。我们将要讨论的 W 函数系也是如此(参看第二章 § 3)。

§ 3 p 进群及其特征群

为了以后从群的角度来了解 W 函数，在这里预先介绍有关群的一些概念。

设 G 是一个非空集合，其中的元素记为 x, y, z 等。如果在 G 中规定一个称为**乘法**的运算∘，使对每两个元 x, $y\in G$, $x\circ y$ 有意义且仍是 G 中的元，并满足下列三个条件：

(i) 结合律。对任何 $x, y, z\in G$, 有 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$；

(ii) 单位元的存在。存在单位元 $e\in G$, 使对一切 $x\in G$ 有 $e\circ x=x\circ e=x$；

(iii) 逆元的存在。对每个 $x\in G$, 存在逆元 $x^{-1}\in G$，满足 $x^{-1}\circ x=x\circ x^{-1}=e$；

则称 G 为**群**。如果除了上述三个条件外，还满足

(iv) 交换律。对任何 x, $y\in G$ 有 $x\circ y=y\circ x$；

则称 G 是 **Abel 群**或**可换群**。如果群 G 中的元的个数是有限的，则称 G 为**有限群**，有限群 G 的**阶**是指它的元的个数。非有限群称为**无限群**。如果群 G 的子集 G_0 依原乘法运算构成群，则称 G_0 为 G 的**子群**。

设 x 是群 G 的元，如果存在正整数（最小的）n 使 $x^n=\underbrace{x\circ x\circ\cdots\circ x}_{n\text{个}}=e$（$e$ 为 G 的单位元），称 x 有**有限的级** n。

例1 设 A_n 表示首 n 个自然数的集，$A_n=\{1, 2, \cdots, n\}$。x 是 A_n 到 A_n 上的一个一一映射（称为**置换**）。每个置换 x 可以写成下列形式：

$$x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1x & 2x & \cdots & nx\end{pmatrix}。$$

例如，当 $n=3$ 时，

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

都是置换。如果规定两个置换 x，y 的积为 A_n 经过映射 x 接着再经过映射 y 的结合，例如记成

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1x & 2x & \cdots & nx\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1y & 2y & \cdots & ny\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ (1x)y & (2x)y & \cdots & (nx)y\end{pmatrix},$$

则容易看出，一切置换构成阶为 $n!$ 的置换群。事实上，由于

$$\left[\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1x & \cdots & nx\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1y & \cdots & ny\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1z & \cdots & nz\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ ((1x)y)z & \cdots & ((nx)y)z\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1x & \cdots & nx\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1y & \cdots & ny\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1z & \cdots & nz\end{pmatrix}\right]$$
$$=\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ (1x)(yz) & \cdots & (nx)(yz)\end{pmatrix},$$

且据置换的积的定义可知，

$$(1x)(yz)=((1x)y)z,\ \cdots,\ (nx)(yz)=((nx)y)z,$$

故上述两式右边相同，因而结合律满足。

显然，单位元是$\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & n\end{pmatrix}$。

设代表置换的映射 x 的逆映射是 x^{-1}，则置换$\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1x & \cdots & nx\end{pmatrix}$的逆元是$\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ 1x^{-1} & \cdots & nx^{-1}\end{pmatrix}$。

置换群一般不是可换群。例如，$n=3$ 时，取

$$x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

则有

$$x\circ y=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad y\circ x=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

故 $x\circ y\neq y\circ x$。

例 2 设 $A=\{0,1\}$ 是两个元素 0，1 的集。其中乘法运算规定为伪加$\oplus$，则 A 是 Abel 群。验证如下。

运算$\oplus$的封闭性、可换性：

$$0\oplus 0=0\quad 1\oplus 1=0,\quad 0\oplus 1=1\oplus 0=1。$$

单位元的存在性：显见 0 为单位元。

逆元的存在性：0 的逆元是 0，1 的逆元是 1。

由于单位元为 0，故验证结合律 $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$ 时，当 x 或 y 为 0 时结果是显然的。此外，当 x，y 均不为 0 时，有

$$(1\oplus 1)\oplus 0=0\oplus 0=0=1\oplus(1\oplus 0),$$

$$(1\oplus 1)\oplus 1=0\oplus 1=1=1\oplus(1\oplus 1),$$

故结合律成立。这样，A 是 Abel 群。

例 3 取 $p=3$，一切序列

$$(x_1 x_2 \cdots), \quad x_j \in \{0, 1, 2\}$$

依 3 进伪加运算$\oplus$构成一个 Abel 群。它的单位元是$(000\cdots)$。如果规定用记号 $x_j' = 0 \ominus x_j$，则 $(x_1 x_2 \cdots)$ 的逆元是$(x_1' x_2' \cdots)$。例如，$(10212\cdots)$的逆元是$(20121\cdots)$。运算$\oplus$的封闭性、可换性与结合律都是明显的。此外，除单位元外，每个元的级均为 3：$x \oplus x \oplus x = x^3 = (000\cdots)$。

设 φ 为群G到群$\dot{G}$中的一个映射，其中乘法运算分别记为 $\circ$ 与 $\cdot$。如果 φ 保持群中乘法运算，即对于G中任意两个元 x，y 有

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \tag{1.22}$$

则称 φ 为G到$\dot{G}$的**同态映射**或简称**同态**。

例 4 2^n 个非负整数的集 $\{0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1\}$ 以二进伪加作为群的乘法运算构成有限 2^n 阶的 Abel 群，这个群称为有限二进群。令映射 φ 由

$$\varphi(k) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$$

确定，则 φ 是群 $\{0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$（以伪加作为群的运算）与群 $\{-1, 1\}$（以普通乘法作为群的运算）之间的一个同态。

关于同态，有下列定理。

定理 1 设G是群，φ 是群G到某个集$\dot{G}$上的同态，这里只要求$\dot{G}$中乘法有定义，则$\dot{G}$是群。

证 $\dot{G}$中的运算 $\cdot$ 的封闭性是显然的。任取 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in \dot{G}$，则因 φ 是G到$\dot{G}$上的映射，必存在元 x，y，$z \in G$，满足

$$\varphi(x) = \dot{x}, \quad \varphi(y) = \dot{y}, \quad \varphi(z) = \dot{z}。$$

故

$$\begin{aligned}(\dot{x} \cdot \dot{y}) \cdot \dot{z} &= (\varphi(x) \cdot \varphi(y)) \cdot \varphi(z) = \varphi(x \circ y) \cdot \varphi(z) \\ &= \varphi(x \circ y \circ z) = \varphi(x) \cdot \varphi(y \circ z) \\ &= \varphi(x) \cdot (\varphi(y) \cdot \varphi(z)) = \dot{x} \cdot (\dot{y} \cdot \dot{z}),\end{aligned}$$

即结合律成立。

设 e 是 G 的单位元。由 $e\circ x=x(x\in G)$ 有

$$\varphi(e)\cdot\varphi(x)=\varphi(e\circ x)=\varphi(x),$$

同理，

$$\varphi(x)\cdot\varphi(e)=\varphi(x\circ e)=\varphi(x),$$

故 $\varphi(e)$ 是 $\dot{G}$ 中的单位元。

最后，由

$$\varphi(x^{-1}\circ x)=\varphi(x^{-1})\cdot\varphi(x)=\varphi(e),$$

$$\varphi(x\circ x^{-1})=\varphi(x)\cdot\varphi(x^{-1})=\varphi(e),$$

可知 $\varphi(x^{-1})$ 是 $\varphi(x)$ 的逆元：$\varphi(x^{-1})=[\varphi(x)]^{-1}$。证毕。

令 $T=\{e^{2\pi it}:0\leqslant t<1\}$。每个 $e^{2\pi it}$ 以 1 为周期，因而对于任一实数 u，一定存在 $t\in[0,1)$ 使 $e^{2\pi it}=e^{2\pi iu}$。容易验明，在普通乘法运算下，T 是 Abel 群，有时也称 T 为圆周群。

设 G 是给定的群（相应的，拓扑群。关于拓扑群的概念，可参看 [17]），运算为 $\circ$，称由 G 到 T 的同态（相应的，连续同态）χ 为 G 的**特征**，亦即，如果映射 χ 满足：对任何 $x\in G$，有 $\chi(x)\in T$ 且

$$\chi(x\circ y)=\chi(x)\chi(y),\quad x,\ y\in G, \tag{1.23}$$

那么，χ 是 G 的一个特征（当 G 是拓扑群情形，要求 χ 连续）。把 G 的一切特征记为 Γ。对于任意两个元 $\chi_1,\chi_2\in\Gamma$，规定积 $\chi_1\chi_2$ 为

$$(\chi_1\chi_2)(x)=\chi_1(x)\chi_2(x),\quad x\in G。 \tag{1.24}$$

我们有

定理 2 设 G 为任意给定的群，Γ 是 G 的一切特征所成的集。则 Γ 是 Abel 群，称为 G 的**特征群**。

证 显然，若 e 是 G 的单位元，x 是 G 的一个元，则对任何 $\chi\in\Gamma$，

$$\chi(e)\chi(x)=\chi(e\circ x)=\chi(x),$$

由于 χ 是 G 到 T 上的同态，故 $\chi(x)\neq 0$，从而 $\chi(e)=1$。又对任何 $\chi\in\Gamma$，任何 $x\in G$ 有

$$\chi(x)\chi(x^{-1})=\chi(x\circ x^{-1})=\chi(e)=1=\chi(x^{-1})\chi(x),$$

故
$$\chi(x^{-1})=[\chi(x)]^{-1}=\overline{\chi(x)}。$$

现在令 $\chi_1(x)=1$（对任何 $x\in G$），则 χ_1 显然是 G 的特征，且因对任何 $\chi\in\Gamma$ 有

$$(\chi_1\chi)(x)=\chi_1(x)\chi(x)=\chi(x)=(\chi\chi_1)(x),\quad x\in G,$$

故 $\chi_1\chi=\chi\chi_1=\chi$，即 χ_1 为 Γ 的单位元。

令 $\overline{\chi}$ 由 $\overline{\chi}(x)=\overline{\chi(x)}$，$x\in G$ 定义。则由等式

$$\chi(x\circ y)=\chi(x)\chi(y),\quad x,\ y\in G,$$

取共轭得 $\overline{\chi}(x\circ y)=\overline{\chi}(x)\overline{\chi}(y)$，故 $\overline{\chi}\in\Gamma$。又因

$$(\overline{\chi}\chi)(x)=\overline{\chi}(x)\chi(x)=\overline{\chi(x)}\chi(x)=[\chi(x)]^{-1}\chi(x)=1,$$

即 $\overline{\chi}\chi=\chi_1$（$\chi_1$ 是 Γ 的单位元），同理 $\chi\overline{\chi}=\chi_1$，故 $\overline{\chi}$ 是 χ 的逆元（$\chi\in\Gamma$）。

任意两个特征的积显然仍是特征，并且 Γ 中的结合律、交换律均是显然的。故 Γ 是 Abel 群。证毕。

定理 2 与定理 1 的区别在于，前者说的是 G 的一切特征构成群，而后者则说 G 在一个同态下的象构成一个群。

在一般情形下求出群的一切特征是比较困难的。为了本书的需要，我们对下面两个特殊的 Abel 群给出它们的特征群（例 5、例 6）。

例 5 考察 p^n 个元的集 $G=\{0,1,\cdots,p^n-1\}$，p 是大于 1 的整数。容易验明它是关于 p 进伪加运算的 Abel 群。现在来求它的特征群。

令 $\omega=e^{2\pi i/p}$。任取 $x\in G$，x 的 p 进表示为

$$x=(x_{-n+1}\cdots x_{-1}x_0)。$$

设$\chi(x)$为G的一个特征。由于每个非单位元x的级为p，$x^p=\overbrace{x\oplus\cdots\oplus x}^{p\text{个}}=0$（0为$G$的单位元），故$\chi(x)^p=\overbrace{\chi(x)\cdots\chi(x)}^{p\text{个}}=\chi(x^p)=\chi(0)=1$，因而作为$x$的复值函数，$\chi(x)$必为1的$p$次根$\omega^k$的形式，$k=0, 1, \cdots, p-1$。由此可以看出，$n$个基本特征是

$$\chi_l(x)=\omega^{x_{-l}},\quad l=0, 1, \cdots, n-1,$$

其它任何特征都可以由这n个特征生成。事实上，每个$\chi(x)=\omega^{x_{-l}}$是特征，这是因为$\chi(x)$显然属于$T(x\in G)$，且对$x, y\in G$，

$$\begin{aligned}\chi(x\oplus y)&=\omega^{(x\oplus y)_{-l}}=\omega^{(x_{-l}\oplus y_{-l})}=\omega^{x_{-l}+y_{-l}}\\&=\omega^{x_{-l}}\omega^{y_{-l}}=\chi(x)\chi(y)。\end{aligned}$$

设χ为G的任一特征，则χ可表为所述基本特征的有限个之积（带有一定的幂次）。这是因为，写x为$x=\sum_{r=0}^{n-1}p^rx_{-r}$并令$\tilde{x}_{-r}=p^rx_{-r}$时，则由特征的性质（注意到$x=\tilde{x}_0\oplus\cdots\oplus\tilde{x}_{-n+1}$），易见

$$\chi(x)=\chi(\tilde{x}_0)\cdots\chi(\tilde{x}_{-n+1})。$$

作为x的函数，特征$\chi(\tilde{x}_0)$只与x的表示中第0位数字有关，因而必取$\chi_0(x)$的某幂次k_0的形式，$\chi(\tilde{x}_0)=\chi_0^{k_0}(x)$，$k_0\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$。对于其余的附标情况类似。这样，$\chi(x)$将取

$$\chi(x)=\chi_0^{k_0}(x)\cdots\chi_{n-1}^{k_{n-1}}(x),$$
$$k_0, \cdots, k_{n-1}\in\{0, 1, \cdots, p-1\}\qquad(1.25)$$

的形式。即任一特征被表成基本特征$\chi_0, \cdots, \chi_{n-1}$的积（带有一定的幂次）。总共获得$p^n$个特征。

例6　p进群及其特征群[8,17]。

设 p 为大于1的整数，$x_k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$，$k=1, 2, \cdots$。一切排列 $x=(x_1x_2\cdots x_k\cdots)$ 依 p 进伪加运算构成一个 Abel 群 G，称为 p 进群（例3是 $p=3$ 情形）。如果对每个 $x\in G$，令数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p^{-k}$ 与之对应，则得到 G 与单位区间[0,1]之间的一种对应，但这种对应不是一一的。例如，$(0\,p-1\,p-1\,p-1\cdots)$ 与 $(1000\cdots)$ 均对应于 $1/p$。如果规定每个 p 进有理数仅与其有尽表示相对应，则可使 G 的一个真子集与[0, 1]成一一对应。因为在伪加运算过程中仍会产生 $p-1$ 的无限循环表示，如

$$(0\,p-1\,0\,p-1\,0\,p-1\cdots)\oplus(0\,0\,p-1\,0\,p-1\,0\cdots)$$
$$=(0\,p-1\,p-1\,p-1\cdots),$$

则上述 G 的那个真子集便不能构成群。但对 W 分析中很多问题来说这种不便不致影响结果，因此就不再详细分析这一点了。有时为了叙述简单起见，常把[0, 1]说成 p 进群或 p 进紧 Abel 群，虽然这是不精确的。

对于紧群 $G=[0, 1]$，取零的基本邻域系[8]为

$$\{(0\cdots0\,x_j\,x_{j+1}\cdots)\},\quad x_j\in\{0,\cdots,p-1\},\quad j=1, 2, \cdots, \tag{1.26}$$

则 G 成为紧拓扑群。它的特征指的是映 G 为 $T=\{e^{2\pi it}; 0\leqslant t<1\}$ 的连续同态映射。现在来求 G 的特征群。

设 χ 为 G 的一个特征。由于 G 的每个元 x 的级为 p，$\overbrace{x\oplus x\oplus\cdots\oplus x}^{p\text{个}}=0$，故

$$\chi^p(x)=\chi(\overbrace{x\oplus\cdots\oplus x}^{p\text{个}})=\chi(0)=1。$$

这样，复值函数 $\chi(x)$ $(x\in G)$ 的每个值满足方程 $\omega^p=1$，即为1的 p 次根 $\omega^k=e^{2\pi ik/p}$，$k=0, 1, \cdots, p-1$。

设 $x=(x_1x_2\cdots)$，容易看出，一个基本特征为

$$\chi_1(x)=e^{\frac{2\pi i}{p}x_1}。$$

其实，

$$\chi_1(x\oplus y)=e^{\frac{2\pi i}{p}(x_1\oplus y_1)}=e^{\frac{2\pi i}{p}(x_1+y_1)}=\chi_1(x)\chi_1(y),$$

并且 χ_1 显然是连续的。故 χ_1 为特征。还可以看出，仅依赖于 x 的第一个坐标 x_1 的任一特征必取 $\chi_1^k(x)=e^{\frac{2\pi i}{p}kx_1}$ 的形式，k 为 $0, 1, \cdots, p-1$ 中之一。仅依赖于其它坐标的特征也可类似地得到。因而得到特征的集：

$$\chi_l^k(x)=e^{\frac{2\pi i}{p}kx_l},\quad k=0, 1, \cdots, p-1,\ l=1, 2, \cdots。\tag{1.27}$$

我们证明，G 的任一特征 χ 可以写成形如 (1.27) 的特征中的有限个之积：

$$\chi(x)=\chi_{l_1}^{k_1}(x)\chi_{l_2}^{k_2}(x)\cdots\chi_{l_n}^{k_n}(x),\tag{1.28}$$

其中 $1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_n, k_1, \cdots, k_n\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$。事实上，写

$$x=\tilde{x}_1\oplus\tilde{x}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{x}_m\oplus\tilde{z}_m,$$

其中

$$\tilde{x}_1=(x_1000\cdots),\ \tilde{x}_2=(0x_200\cdots),\ \cdots,$$
$$\tilde{x}_m=(0\cdots0x_m0\cdots),\ \cdots,\ \tilde{z}_m=(0\cdots0x_{m+1}x_{m+2}\cdots),$$

有

$$\chi(x)=\chi(\tilde{x}_1)\cdots\chi(\tilde{x}_m)\chi(\tilde{z}_m);$$

由于当 $m\to\infty$ 时 $\tilde{z}_m$ 收敛于 G 的单位元 0，故据特征的连续性，$\chi(\tilde{z}_m)$ 收敛于 $\chi(0)=1$。注意到 $\chi(x)$ 所取的值域是 $e^{2\pi ik/p}$, $k\in\{0, 1, \cdots, p-1\}$，便推出，自某个 n 以后，$\chi(\tilde{z}_m)$ 一直等于 1。这样，$\chi(x)$ 成为

$$\chi(x)=\chi(\tilde{x}_1)\chi(\tilde{x}_2)\cdots\chi(\tilde{x}_n)$$

的形式。这里，每个 $\chi(\tilde{x}_l)$ 取 (1.27) 中的某一个特征。于是，略去 $\chi(\tilde{x}_l)$ 恒等于 1 的那些特征，便可以将上面的 $\chi(x)$ 写成 (1.28)的形式。

据定理 2 可知，一切形如 (1.28) 的特征构成 G 的特征群（这是无限群）。以后我们会看到，p 进 W 系正好与这样的特征群构成对应。并且，R 函数 $\varphi_n(x)$ 正好与基本特征 $\chi_1^{(n+1)}(x)$ 相对应。

§4　实变函数论中的一些结果

本节摘录的内容是为阅读书中某些较理论的论述而准备的。目的是为了便于读者查阅，因此没有附上证明。关于证明，可以参看[35]。对于只须初步了解 W 函数并想初步应用它们的读者，本节可以略去不读。

(i) 数列的 Abel 变换。

设 $\{u_k\}$，$\{v_k\}$ 为两个数列，则有

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) - U_{m-1}v_m + U_n v_n,$$

其中 $0 \leqslant m \leqslant n$，$U_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k (k \geqslant 0)$，并约定 $U_{-1} = 0$。

(ii) Banach 空间。

设 E 是线性空间或向量空间，对每个 $f \in E$，有非负数（称为**范数**）$\|f\|$ 与之相应，满足下列三个条件：(a) $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$；(b) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ (α 为复数)；(c) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$；则称 E 为**赋范线性空间**。称赋范线性空间 E 中元列 f_n 收敛于 f，若 $\|f_n - f\| \to 0 (n \to \infty)$，这时也称 f_n **强收敛于 f**。若 $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0$，称 f_n 为 **Cauchy 序列**。如果 E 中任一 Cauchy 序列都收敛于 E 中的一元素，称 E 是 **Banach 空间**。

(iii) Banach 代数。

设E是 Banach 空间，若对E中任意两个元f, g, 可定义积$fg\in E$，满足：(a) 关于这一乘法，E成为可换代数，即对任何f, g, $h\in E$, 数α有$f(gh)=(fg)h$, $f(g+h)=fg+fh$, $fg=gf$, $\alpha(fg)=(\alpha f)g$；(b) 积的范数满足$\|fg\|\leqslant\|f\|\|g\|$，则称$E$为 Banach 代数。

(iv) 空间$C_{[a,b]}$与$C_{2\pi}$。

$C_{[a,b]}$是指$[a, b]$上一切(实)连续函数的集合。任何$f\in C_{[a,b]}$的范数定义为$\|f\|_C=\sup|f(x)|$。在这种范数下，$C_{[a,b]}$是一 Banach 空间。当f是以2π为周期的连续函数时，一切这样的f所成的空间记为$C_{2\pi}$，称为具有周期2π的连续函数空间。

(v) 空间$L_{[a,b]}$。

这是一切于$[a, b]$上 Lebesgue 可积（简称可积）的函数空间，$f\in L_{[a,b]}$的范数用$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$定义，这个空间是 Banach 空间。这里$[a, b]$不限于有限区间。$f\in L_{[a,b]}$称为可积函数。

常用工具有：

(a) Fatou 引理。

设$\{f_n\}$是$(-\infty, \infty)$上非负函数列，若$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，则$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)dx$。

(b) Levi 单调收敛定理。

设$\{f_n\}$是$(-\infty, \infty)$上的单调递增正函数列。若$\lim f_n(x)=f(x)$，则$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(x)dx$。

(c) Lebesgue 控制收敛定理。

设 $\{f_n\}$ 是 $L_{(-\infty,\infty)}$ 中的序列，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，且存在 $g\in L_{(-\infty,\infty)}$ 满足 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$，$n=1, 2, \cdots$，则 $f\in L_{(-\infty,\infty)}$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$。

注．如果等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上除了一个零测度集外处处成立，则称 f_n **几乎处处收敛**于 f，记为 $f_n\to f$ (a. e.)。在上述 (a)、(b)、(c) 中将等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ $(x\in(-\infty, \infty))$ 换成 $f_n\to f$(a. e.)，其余不变，定理的结论仍然成立。

(d) Fubini 定理。

设 $f(x, y)$ 是二维平面上定义的可测函数。若 f 是二元绝对可积函数，则对几乎所有的 x，$f(x, y)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上关于 y 的绝对可积函数，作为 x 的函数 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ 属于 $L_{(-\infty,\infty)}$，且有 $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$。

又，若 $\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|dy\right\}dx$ 存在为有限，则 f 为二元绝对可积，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right\}dy.$$

(e) D 点与 L 点。

设 $f\in L_{(-\infty,\infty)}$，若在一点 x 有

$$\int_0^h [f(x+t)-f(x)]dt=o(h) \quad (h\to 0),$$

称 x 为 f 的 D 点。若条件加强为

$$\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt = o(h) \quad (h\to 0),$$

称 x 为 f 的 L 点。我们有，可积函数 f 的连续点是 L 点，且 $(-\infty, \infty)$ 中几乎所有的点是 L 点。

(vi) 空间 $L^q_{[a,b]}$，$q\geq 1$。

$L^q_{[a,b]}$，$q\geq 1$ 是 Banach 空间，其中元 f 的范数用 $\|f\|_q = \left\{\int_a^b |f(x)|^q dx\right\}^{1/q}$ 定义，空间 $L^q_{[a,b]}$ 即由一切使 $\|f\|_q<\infty$ 的元 f 所成。关于这类空间，最常用的三个不等式如下。

(a) Hölder 不等式。

设 $f\in L^q_{[a,b]}$，$g\in L^{q'}_{[a,b]}$，这里 $1/q+1/q'=1$，则有

$$fg\in L_{[a,b]}, \text{ 且 } \|fg\|_1\leq \|f\|_q\|g\|_{q'}。$$

当 $q=2$ 时，$q'=2$。这不等式成为 Schwarz 不等式（或称 Cauchy 不等式）。

(b) Minkowski 不等式。

设 $f(x, t)$ (t 为参数，$t\in A$) 对每个 t 属于 $L^q_{(-\infty,\infty)}$，且看成 t 的函数 $\|f(x,t)\|_q\in L_A$，则有

$$\left\|\int_A f(x,t)dt\right\|_q \leq \int_A \|f(x,t)\|_q dt。$$

这是一般的 Minkowski 不等式。当 A 为有限集时，它成为通常的 Minkowski 不等式。

(c) 卷积。

设 $f\in L^q_{(-\infty,\infty)}$，$g\in L_{(-\infty,\infty)}$。定义 f 与 g 的**卷积**为

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt。$$

有结果 $\|f*g\|_q\leq \|f\|_q\|g\|_1$。

(d) 平均连续性。

设 $f\in L^q_{[a,b]}$，$1\leq q<\infty$，则

$$\|f(x+h)-f(x)\|_q=o(1),\quad h\to 0。$$

空间 $L^q_{[a,b]}$，当 $q=2$ 时在应用上特别重要，它不仅是 Banach 空间，而且还是 Hilbert 空间(完备的内积空间)。当 $q=\infty$ 时，它成为本性有界函数空间，其中元 f 的范数定义为

$$\|f\|_\infty=\underset{x\in(a,b)}{\text{ess}\ \sup}|f(x)|=\inf_{mA=0}\sup_{x\in[a,b]-A}|f(x)|。$$

当 $f(x)$ 连续时，这范数与空间 $C_{[a,b]}$ 的范数相一致。

(vii) 特征函数与阶梯函数。

集 A 的特征函数定义为

$$\kappa_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\overline{\in}A。\end{cases}$$

阶梯函数是区间的特征函数的有限线性组合。

(viii) 稠密集与可分空间。

设 A 为空间 $L^q_{[a,b]}(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 的子集。如果 $L^q_{[a,b]}$ 中的任一元 f，可以用 A 中的元列 g_n 来任意逼近(即 $\|g_n-f\|_q\to 0$，当 $n\to\infty$)，则称 A 在 $L^q_{[a,b]}$ 中**稠密**。阶梯函数类在 $L^q_{[a,b]}$ 中稠密。

如果存在一个可列集 B，B 在 $L^q_{[a,b]}$ 中稠密，则说 $L^q_{[a,b]}$ 是**可分的**。可以证明，$L^q_{[a,b]}$ 是可分的。例如，当 $[a,b]$ 是有限区间时，以有理数为系数的多项式所成的集在 $L^q_{[a,b]}$ 中稠密，又限定函数值取有理数的阶梯函数类在 $L^q_{[a,b]}$ 中稠密。

(ix) 绝对连续函数。

设 $F(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的有限函数。如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任何有限个互不相交的子区间 $[a_k,b_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，其长度总和小于 δ 时，就有

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon,$$

则称 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为绝对连续。设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的

可积函数，则可证明 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $[a, b]$ 上绝对连续函数，且在 $[a, b]$ 上几乎处处有 $F'(x)=f(x)$。

习　　题

1．试证 $G=\{0,1,2,3,\cdots,p^n-1\}$ 对于 p 进伪加运算 $\oplus$ 构成 Abel 群。

2．试求下列各数的 Gray 码(对于 $p=2, 3$)：

21，　35，　126，　723，　1001。

3．试求下列各数的逆 Gray 码(对于 $p=2, 3$)：

7，　11，　126，　101，　2187。

4．设 $0\leqslant k\leqslant 2^n-1$，$n$ 为正整数，则

$$G^{2^n}(k)=k,$$

其中 $G^{2^n}(k)$ 表示对 k 接连取 2^n 次 Gray 码(对于 $p=2$)。

5．对于 $p=3$ 考虑下列问题。设 α，β，γ 均为自然数，问分配律 $\alpha(\beta\oplus\gamma)=\alpha\beta\oplus\alpha\gamma$ 是否成立？何时成立？

6．试证下列等式(对于 $p=2$)：

(i) $2k\oplus 2j=2(k\oplus j)$,

(ii) $(2k-1)\oplus(2j-1)=2((k-1)\oplus(j-1))$,

(iii) $(2k-1)\oplus 2j=2(j\oplus(k-1)+1)-1$,

(iv) $(2k)\oplus(2j-1)=2(k\oplus(j-1)+1)-1$.

并将它们推广到 p 进情形。

7．试证二个元的集 $\{e, a\}$ 满足下列运算规则

$$ee=e,\quad ea=a,\quad ae=a,\quad a^2=e,$$

构成一个群。

8．设四个元的集 $\{e, a, b, c\}$ 满足结合律与下列运算规则

$$ea=ae=ee=e,\quad b=a^2,\quad c=ab,\quad a^4=e,$$

试证此四元集为 Abel 群。还有其它不同结构的四元集的群吗？

第2章

Walsh 函数及其性质

本章详细地讨论 Walsh 函数系。这些内容是学习以后各章的基础。从本章开始到第五章为止，均以二进情形为主。定义 W 函数的办法很多。我们在 §2 先介绍 W 函数的两种定义，§6 中再给出另外一些定义，并且引入 p 进 W 函数。在讨论 R 函数的基础上，详细证明了 W 函数的一些基本性质，处理了可积函数按 W 系的展开问题，并初步论述若干逼近定理，最后简要地介绍一下二元 W 函数。

§1 Rademacher 函数

Rademacher 函数系（R 系）中有可列多个函数，记为 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，每个函数都以 1 为基本周期。正如引言中已提到的，R 函数 $\varphi_n(x)$ 在基本周期区间 $[0,1)$ 上的定义是

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & 若\ \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\end{cases}\tag{2.1}$$

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(2^n x),\quad n=1, 2, \cdots。$$

R 函数可以表示为其他形式。这里介绍它的分析表达式。

设 $0\leqslant x<1, x_j=j/2^{n+1}, j=0,1,\cdots, 2^{n+1}-1$。区间 $[0,1)$ 上的 R 函数定义为

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}[\sin(2^{n+1}\pi x)], & 若\ x\neq x_j, \quad (2.2)\\ \lim\limits_{x\to x_j+0}\varphi_n(x), & 若\ x=x_j, \quad (2.3)\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots。$$

(2.2) 式中的符号函数 $\operatorname{sgn} u$ 的意义为

$$\operatorname{sgn} u=\begin{cases}1, & 若\ u>0,\\ -1, & 若\ u<0。\end{cases}$$

易知，由 (2.2)、(2.3) 式所定义的函数实际上与通过 (2.1)式给出的 R 函数是一致的。

其实，对 $n=0$，由 (2.2) 式

$$\varphi_0(x)=\operatorname{sgn}(\sin 2\pi x)=\begin{cases}1, & 若\ 0<x<\frac{1}{2},\\ -1, & 若\ \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$$

加上条件 (2.3)，

$$\varphi_0(0)=\lim_{x\to 0^+}\varphi_0(x)=1,$$

$$\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\varphi_0(x)=-1,$$

就给出了 (2.1) 中的 $\varphi_0(x)$，对 $n=1, 2, \cdots$，有

$$\varphi_n(x)=\operatorname{sgn}[\sin(2^{n+1}\pi x)]$$
$$=\operatorname{sgn}[\sin 2\pi(2^n x)]=\varphi_0(2^n x),$$

它与条件 (2.3) 一起给出了 (2.1) 中的 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2,\cdots)$。

不难看出，R 系中每个函数 $\varphi_n(x)$ 都是区间 $[0, 1)$ 上的右连续函数，且在 2^{n+1} 个子区间

$$\left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{2}{2^{n+1}}\right), \cdots, \left[\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, 1\right)$$

上，$\varphi_n(x)$依次取 1 与 -1。此外，据(2.1)式，给定了 $\varphi_0(x)$ 以后，每个 $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$的图形可由 $\varphi_0(x)$横向压缩 $\frac{1}{2^n}$ 倍而得。

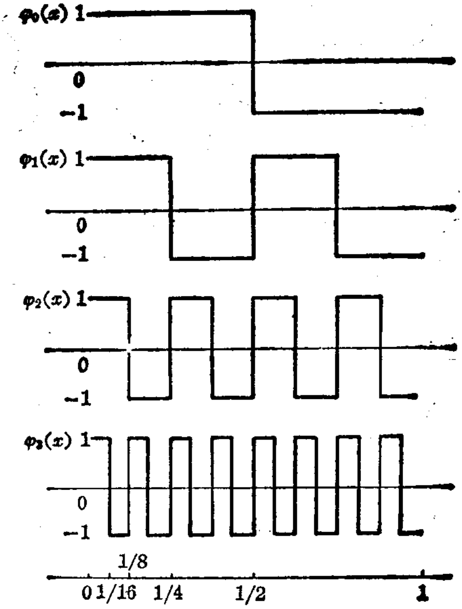


图 2.1

R 系中首四个 R 函数的图形如图 2.1 所示。

R 函数有如下性质。

性质 1° R 系是区间$[0, 1)$上的不完整标准直交系。

证 R 系的不完整性在引言中已阐明了。故只须证明其标准直交性。即证下述关系式成立：

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n \neq m。 \end{cases}$$

若 $n=m$，则

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^1 \varphi_n^2(x)dx = \int_0^1 dx = 1。$$

若 $n \neq m$，不妨设 $n<m$，令 $m=n+s$，$s \geqslant 1$。由于当

$$x\in\left[\frac{\lambda-1}{2^{n+1}},\ \frac{\lambda}{2^{n+1}}\right)$$

时，$\varphi_n(x)=(-1)^{\lambda-1}$，$\lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n+1}$，以及 $\varphi_m(x)=\varphi_0(2^m x)$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx&=\sum_{\lambda=1}^{2^{n+1}}\int_{(\lambda-1)/2^{n+1}}^{\lambda/2^{n+1}}\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx\\&=\sum_{\lambda=1}^{2^{n+1}}(-1)^{\lambda-1}\int_{(\lambda-1)/2^{n+1}}^{\lambda/2^{n+1}}\varphi_0(2^m x)dx\\&=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{\lambda=1}^{2^{n+1}}(-1)^{\lambda-1}\int_{\lambda-1}^{\lambda}\varphi_0(2^{s-1}x)dx.\end{aligned}$$

但是，对任何非负整数 k，都有

$$\int_0^1\varphi_k(x)dx=0;$$

又据 R 函数的周期性 $\varphi_0(x+1)=\varphi_0(x)$ 与 $s\geqslant 1$ 得到

$$\begin{aligned}\int_{\lambda-1}^{\lambda}\varphi_0(2^{s-1}x)dx&=\int_0^1\varphi_0(2^{s-1}x)dx\\&=\int_0^1\varphi_{s-1}(x)dx=0\quad(\lambda=1,\ 2,\cdots,\ 2^{n+1}),\end{aligned}$$

所以得

$$\int_0^1\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0\quad(n\neq m).$$

性质 2° 若 $x\in[0,\ 1)$ 的二进表示为

$$x=(0;\ x_1x_2\cdots x_{n+1}\cdots),$$

其中 $x_j\in\{0,\ 1\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，则

$$\varphi_n(x)=(-1)^{x_{n+1}}.\tag{2.4}$$

证 据第一章§1中的约定，二进有理数取有尽表示。设

$$x=(0;\ x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}\cdots),$$

对任意非负整数 n 有

$$2^n x=(x_1x_2\cdots x_n;\ x_{n+1}\cdots).$$

设 $[2^n x]$ 与 $\{2^n x\}$ 分别表示 $2^n x$ 的整数部分与小数部分，利用

R 函数的周期性，便有

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(2^nx)=\varphi_0([2^nx]+\{2^nx\})=\varphi_0(\{2^nx\})。$$

注意到

$$\{2^nx\}=(0;\ x_{n+1}x_{n+2}\cdots),$$

据 (2.1) 式得出

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(\{2^nx\})=\begin{cases}1, & 若\ x_{n+1}=0,\\ -1, & 若\ x_{n+1}=1,\end{cases}$$

由此即得 (2.4) 式。

性质 2° 表明，每个 R 函数 $\varphi_n(x)$ 的值仅与 x 的二进表示中的第 $n+1$ 位数字有关。读者不难验证，表示式 (2.4) 也可作为 R 函数的另一种定义。 (2.4) 式有时称为 R 函数的二进表示式。

由性质 2° 即可推出

性质 3° 设 $x,\ y\in[0,\ 1)$。若 $x\oplus y=(x_i\oplus y_i)$ 不出现 1 的无限循环，则对每个 $n=0,\ 1,\ \cdots$ 有

$$\varphi_n(x)\varphi_n(y)=\varphi_n(x\oplus y)。\tag{2.5}$$

证 设 $x,\ y$ 的二进表示分别为

$$x=(0;\ x_1x_2\cdots),\quad y=(0;\ y_1y_2\cdots)。$$

由伪加定义

$$z=x\oplus y=(0;x_1\oplus y_1\ x_2\oplus y_2\ \cdots)。$$

若 z 的二进表示记为 $z=(0;\ z_1z_2\cdots)$，由假设条件，$(x_i\oplus y_i)$ 不出现 1 的无限循环，因而有

$$z_i=x_i\oplus y_i\quad (i=1,2,\cdots)。$$

于是，对每个 $n=0,\ 1,\ \cdots$ 由性质 2°

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)\varphi_n(y)&=(-1)^{x_{n+1}}\cdot(-1)^{y_{n+1}}=(-1)^{x_{n+1}+y_{n+1}}\\&=(-1)^{x_{n+1}\oplus y_{n+1}}=(-1)^{z_{n+1}}=\varphi_n(x\oplus y)。\end{aligned}$$

注意，若有某一对 $x,\ y\in[0,\ 1)$ 使 $x\oplus y=(x_i\oplus y_i)$ 出现

1的无限循环，关系式(2.5)未必成立。例如，取 $x=(0;101010\cdots)$，$y=(0;0001010\cdots)$，得伪和 $x\oplus y=(0;10111\cdots)$。由于约定二进有理数仅取有尽表示，这个伪和应表示为

$$x\oplus y=(0;11000\cdots)=\frac{3}{4}。$$

不难验证，对上述 x，y 公式(2.5)只对 $n=0$ 成立，而对其他的一切 n 均不成立。

我们再作进一步的观察。设 $y=(0;y_1y_2\cdots)$ 为固定的数，那么对每个 n，影响 $\varphi_n(x\oplus y)$ 的值而使等式(2.5)可能不成立的点 $z=x\oplus y$ 应具有如下的形式

$$z=x\oplus y=(0;z_1z_2\cdots z_{n+1}111\cdots)。$$

由于 y 是固定的，y_{n+2}，y_{n+3}，$\cdots$ 便已确定。要出现上述形式的 z，数

$$x=(0;x_1x_2\cdots x_{n+1}x_{n+2}\cdots)$$

应是这样的，它使 $x_k=1-y_k(k\geqslant n+2)$ 为确定值，而 $x_j(j=1,2,\cdots,n+1)$ 可任意取1或0，但这样的 x 点只有 2^{n+1} 个。因此，除去 2^{n+1} 个(有限个)上述的 x 点以外，等式(2.5)总是成立的。

这样，性质3°还可改述为：设 $y\in[0,1)$ 为固定，对于每个 n，等式(2.5)除去有限个 x 的值以外，在 $[0,1)$ 上处处成立。

最后，据第一章§3有关 p 进群的特征的概念，性质3°中等式(2.5)正好是二进群的特征所必须满足的条件。依代数学的观点，基本区间 $[0,1)$ 上的每个 R 函数 $\varphi_n(x)$ (借助于(2.4)式)对应于二进群 G 上的一个基本特征函数(见第二章§3)。因此，R 系可以与 G 的特征群的真子集(即基本特征函数集)联系起来。我们不禁要问：基本区间 $[0,1)$ 上什

么样的函数系才对应于G上的全体特征呢？答案是，这个函数系就是在第二章§2要引入的，并在这章§3加以详细论述的W系。

§2 Walsh函数的定义

W系中共有可列多个函数，每个函数是以1为周期的实值函数，从而可以在基本区间$[0, 1)$上来考虑。我们将看到区间$[0, 1)$上的每个W函数可以表示为有限个R函数的乘积。

W系可以有多种排序方法。按列率（关于列率概念详见第四章§2）排序的W函数依次记为

$$wal_0(x),\ wal_1(x),\ \cdots,\ wal_k(x),\ \cdots$$

或记为$\{wal_k(x)\}$，$k=0, 1, \cdots$。列率序W函数$wal_k(x)$定义如下：

设非负整数$k=(k_{-(N-1)}k_{-(N-2)}\cdots k_0)$，$k_{-j}\in\{0, 1\}$，$j=0, 1, \cdots, N-1$。$N$与$k$有关，除$k=0$外总可假定首位二进制代码$k_{-(N-1)}=1$。又说$G(k)$为$k$的Gray码，记

$$G(k)=(k'_{-(N-1)}k'_{-(N-2)}\cdots k'_0),$$

$$k'_{-j}=k_{-j}\oplus k_{-(j+1)}\quad (j=0, 1, \cdots, N-1,\ k_{-N}=0)。$$

并以$(j: k'_{-j}=1)$表示使$k'_{-j}=1$的附标j的集合。那么，定义

$$\begin{aligned} &wal_0(x)=1, \\ &wal_k(x)=\prod_{(j:k'_{-j}=1)}\varphi_j(x), \end{aligned}\qquad x\in[0,1), \qquad (2.6)$$

其中$\varphi_j(x)$就是由(2.1)式表示的R函数。

要写出列率序的W函数$wal_k(x)$，可把k表示为二进制

数 $k=(k_{-(N-1)}k_{-(N-2)}\cdots k_0)$，再求出其 Gray 码

$$G(k)=(k'_{-(N-1)}k'_{-(N-2)}\cdots k'_0),$$

然后根据 Gray 码的每个代码把 $wal_k(x)$ 表示为若干个 R 函数的乘积。就是说，某个代码 $k'_{-s}=1(0\leqslant s\leqslant N-1)$，则在函数的乘积中必出现因子 $\varphi_s(x)$，否则(即 $k'_{-s}=0$ 的情形)就不出现因子 $\varphi_s(x)$。

例 1 试用 R 函数的乘积来表示 $wal_5(x)$，$wal_{27}(x)$。

【解】 因 $k=5$ 的二进表示为 $5=(101)$，得其 Gray 码 $G(5)=(111)$。即 $k'_{-2}=k'_{-1}=k'_0=1$，因而

$$wal_5(x)=\varphi_2(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)。$$

由于 $27=(11011)$，得 $G(27)=(10110)$，这表明 $k'_{-4}=k'_{-2}=k'_{-1}=1$，而 $k'_{-3}=k'_0=0$，所以有

$$wal_{27}(x)=\varphi_4(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)。$$

W 系也可以按照**自然序**排列(有时亦称 Paley 序)，这时把 W 函数依次记为

$$w_0(x),\ w_1(x),\ \cdots,\ w_n(x),\ \cdots$$

或 $\{w_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，它们的定义如下：

设 $n=(n_{-(N-1)}n_{-(N-2)}\ \cdots n_0)$，$n_{-j}=\{0,1\}$，$j=0,1,\cdots,N-1$，除 $n=0$ 外，约定 $n_{-(N-1)}=1$。那么，规定

$$\begin{aligned}&w_0(x)=1,\\&w_n(x)=\prod_{(j:n_{-j}=1)}\varphi_j(x),\ n=1,2,\cdots,x\in[0,1),\end{aligned}\qquad(2.7)$$

其中集 $(j:n_{-j}=1)$ 的意义如前。

例 2 试求 $w_{13}(x)$ 的 R 函数乘积表示式。

【解】 因 $13=(1101)$，这表明

$$n_{-3}=n_{-2}=n_0=1,$$

$$\therefore\quad w_{13}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_0(x)。$$

据 $w_n(x)$ 的定义 (2.7)，若令

$$n = 2^{n_s} + 2^{n_{s-1}} + \cdots + 2^{n_1},$$

其中 $n_s > n_{s-1} > \cdots > n_1 \geqslant 0$。则 (2.7) 变形为

$$w_n(x) = \varphi_{n_s}(x)\varphi_{n_{s-1}}(x)\cdots\varphi_{n_1}(x)。\qquad (2.7')$$

例如，$22 = 2^4 + 2^2 + 2^1$，所以

$$w_{22}(x) = \varphi_4(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)。$$

从 W 系的两种不同排序的定义可以明了，$\{w_n(x)\}$ 中的序号 n 就是 $\{wal_k(x)\}$ 中的序号 k 的 Gray 码，即

$$n = G(k),$$

也就是说，两组函数之间有如下对应关系

$$wal_k(x) = w_{G(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \cdots。\qquad (2.8)$$

例如，

$$wal_5(x) = w_7(x)，因为\ G(5) = 7,$$

$$wal_{27}(x) = w_{22}(x)，因为\ G(27) = 22。$$

注意到：对于 $r = 0, 1, 2, \cdots$，数集 $A = \{0, 1, \cdots, 2^r - 1\}$ 在 Gray 码的变换下仍为自身，只是变换后的次序与变换前不同（见第一章 § 1 性质 2°），所以除了排列次序不同外，$\{wal_k(x)\}$ 与 $\{w_n(x)\}$ 的首 2^r 个函数是一样的。

表 2.1 与表 2.2 分别给出 $\{wal_k(x)\}$ 与 $\{w_n(x)\}$ 的首 16 个函数的表示。这些函数的图形由图 2.2 所示。

W 系除上述两种排序方法外，在第三章 § 4 中还将引入另外一种排列次序，由于它与 Hadamard 矩阵密切相关，所以也叫做 Hadarmard 序。这三种序可以互换（详见第三章 § 4），并且各有其特点。工程上常用的是列率序，因为列率与 Fourier 分析中的频率颇为相似。在理论研究上，采用自然序，它便于引入 p 进 W 函数与广义 W 函数，并且在论证 W 函数性质时较为方便。Hadamard 序的优点是便于作快速 Walsh 变

表 2.1

序号k	k的二进制表示	Gray 码 $G(k)$	表示为 R 函数的乘积
0	(0)	(0)	$wal_0(x)=1$
1	(1)	(1)	$wal_1(x)=\varphi_0(x)$
2	(10)	(11)	$wal_2(x)=\varphi_1(x)\varphi_0(x)$
3	(11)	(10)	$wal_3(x)=\varphi_1(x)$
4	(100)	(110)	$wal_4(x)=\varphi_2(x)\varphi_1(x)$
5	(101)	(111)	$wal_5(x)=\varphi_2(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$
6	(110)	(101)	$wal_6(x)=\varphi_2(x)\varphi_0(x)$
7	(111)	(100)	$wal_7(x)=\varphi_2(x)$
8	(1000)	(1100)	$wal_8(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)$
9	(1001)	(1101)	$wal_9(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_0(x)$
10	(1010)	(1111)	$wal_{10}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$
11	(1011)	(1110)	$wal_{11}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)$
12	(1100)	(1010)	$wal_{12}(x)=\varphi_3(x)\varphi_1(x)$
13	(1101)	(1011)	$wal_{13}(x)=\varphi_3(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$
14	(1110)	(1001)	$wal_{14}(x)=\varphi_3(x)\varphi_0(x)$
15	(1111)	(1000)	$wal_{15}(x)=\varphi_3(x)$

表 2.2

自然序号 n	二进制表示	表示为 R 函数的乘积	两种序的关系
0	(0)	$w_0(x)=1$	$w_0(x)=wal_0(x)$
1	(1)	$w_1(x)=\varphi_0(x)$	$w_1(x)=wal_1(x)$
2	(10)	$w_2(x)=\varphi_1(x)$	$w_2(x)=wal_3(x)$
3	(11)	$w_3(x)=\varphi_1(x)\varphi_0(x)$	$w_3(x)=wal_2(x)$
4	(100)	$w_4(x)=\varphi_2(x)$	$w_4(x)=wal_7(x)$
5	(101)	$w_5(x)=\varphi_2(x)\varphi_0(x)$	$w_5(x)=wal_6(x)$
6	(110)	$w_6(x)=\varphi_2(x)\varphi_1(x)$	$w_6(x)=wal_4(x)$
7	(111)	$w_7(x)=\varphi_2(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$	$w_7(x)=wal_5(x)$
8	(1000)	$w_8(x)=\varphi_3(x)$	$w_8(x)=wal_{15}(x)$
9	(1001)	$w_9(x)=\varphi_3(x)\varphi_0(x)$	$w_9(x)=wal_{14}(x)$
10	(1010)	$w_{10}(x)=\varphi_3(x)\varphi_1(x)$	$w_{10}(x)=wal_{12}(x)$
11	(1011)	$w_{11}(x)=\varphi_3(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$	$w_{11}(x)=wal_{13}(x)$
12	(1100)	$w_{12}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)$	$w_{12}(x)=wal_8(x)$
13	(1101)	$w_{13}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_0(x)$	$w_{13}(x)=wal_9(x)$
14	(1110)	$w_{14}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)$	$w_{14}(x)=wal_{11}(x)$
15	(1111)	$w_{15}(x)=\varphi_3(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)$	$w_{15}(x)=wal_{10}(x)$

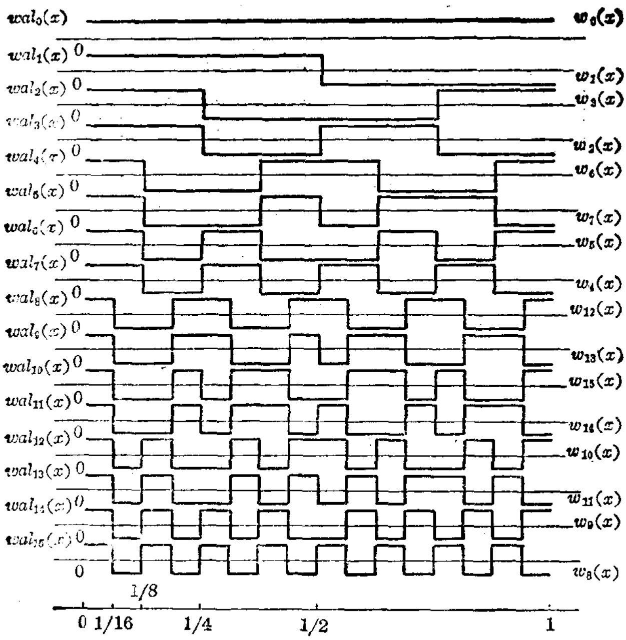


图 2.2

换。在本书以后各章节中将根据需要而采用不同排序的 W 系。

现在再介绍 W 函数的另一种定义，这就是 W 函数可表示为 L 函数的乘积。为此先引入 **L 函数系**（简称 L 系）。

L 系有可列多个函数，记为$\{\psi_n(x)\}$，$n=0, 1, 2, \cdots$。每个函数都以 1 为基本周期。设 $0\leqslant x<1$，$x_j=(2j-1)/2^{n+1}$ $(j=1, 2, \cdots, 2^n)$。那么，区间 $[0, 1)$ 上的 L 函数定义为

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}[\cos(2^n\pi x)], & \text{若 } x\neq x_j,\\ \lim\limits_{x\to x_j+0}\psi_n(x), & \text{若 } x=x_j,\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots。\tag{2.9}$$

L 系中首四个函数的图形由图 2.3 所示。

L 函数也有一些简单性质，例如，L 函数都是右连续函数；L 系也是 $[0, 1)$ 上的不完整标准直交系；除 $\psi_0(x)$ 是关于 $x=\frac{1}{2}$ 奇对称以外，其余的函数 $\psi_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 都是偶对称的 $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 等等。L 函数与 R 函数之间还有简单的关系

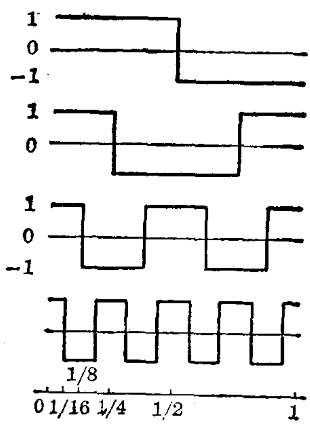


图 2.3

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(x),\quad n=1, 2, \cdots, \tag{2.10}$$

$$\varphi_n(x)=\psi_n(x)\psi_{n-1}(x)\cdots\psi_0(x)。 \tag{2.11}$$

这两个关系式的证明留作习题。

建立了 L 系以后，我们又可以定义 $wal_k(x)$。

设
$$k=(k_{-(N-1)}\,k_{-(N-2)}\cdots k_0),$$
$$k_{-j}\in\{0, 1\},\ j=0, 1, \cdots, N-1。$$

对于 $x\in[0, 1)$ 规定

$$\begin{aligned} &wal_0(x)=1,\\ &wal_k(x)=\prod_{(j:k_j=1)}\psi_j(x)。\end{aligned} \tag{2.12}$$

有时，定义 (2.12) 可以直接改写为

$$wal_k(x)=\prod_{j=0}^{N-1}\operatorname{sgn}[\cos(k_{-j}2^j\pi x)]。 \tag{2.13}$$

若令 $k=2^{k_r}+2^{k_{r-1}}+\cdots+2^{k_1}\quad(k_r>k_{r-1}>\cdots>k_1\geqslant 0)$，

则 (2.12) 还能表为

$$wal_k(x)=\psi_{k_r}(x)\psi_{k_{r-1}}(x)\cdots\psi_{k_1}(x)。 \tag{2.13'}$$

例如，因 $6=(110)$，即 $k_{-2}=k_{-1}=1$，$k_0=0$，所以据

(2.12) 或 (2.13) 有

$$wal_6(x)=\psi_2(x)\psi_1(x)。$$

又如，因 $27=2^4+2^3+2^1+2^0$，即 $k_4=4, k_3=3, k_2=1, k_1=0$. 所以据 (2.13′) 得

$$wal_{27}(x)=\psi_4(x)\psi_3(x)\psi_1(x)\psi_0(x)。$$

利用关系式 (2.10)，可以把 W 函数由 L 函数的乘积表示转换为由 R 函数的乘积表示。仍以 $wal_{27}(x)$ 为例。注意到 $\psi_0(x)=\varphi_0(x)$ 与 $\varphi_n^2(x)=1\ (n=0, 1, \cdots)$，于是

$$\begin{aligned} wal_{27}(x) &= \psi_4(x)\psi_3(x)\psi_1(x)\psi_0(x) \\ &= \varphi_4(x)\varphi_3(x)\cdot\varphi_3(x)\varphi_2(x)\cdot\varphi_1(x)\varphi_0(x)\cdot\varphi_0(x) \\ &= \varphi_4(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)。 \end{aligned}$$

上述表示式正好就是直接通过定义 (2.6) 所求得的表示式。这个现象并非偶然。其实，上面所介绍的 W 函数 $wal_k(x)$ 的两种定义（一种是把 $wal_k(x)$ 表示为 R 函数的乘积 (2.6)，另一种是把同一个函数表示为 L 函数的乘积 (2.12)）彼此是等价的。下面来证明它们的等价性。

我们只证明，由 (2.12) 可推出 (2.6)。关于其逆，读者可作为练习自行完成。假设 (2.12) 成立。由关系式 (2.10) 得

$$wal_k(x)=\prod_{(j:k_{-j}=1)}\psi_j(x)=\prod_{(j:k_{-j}=1)}\varphi_j(x)\varphi_{j-1}(x)。\quad (2.14)$$

这时有两种情形可能发生，i) 当 k 的相邻两个二进制代码 $k_{-(j+1)}$ 与 k_{-j} 相同时，相应地有 $k'_{-j}=k_{-(j+1)}\oplus k_{-j}=0$，则 (2.14) 右边的乘积中一定不出现 $\varphi_j(x)$，这是因为，若 $k_{-(j+1)}=k_{-j}=0$，知 (2.12) 右边的乘积中无 $\psi_{j+1}(x)$ 与 $\psi_j(x)$ 的因子，故从 (2.10) 知 (2.14) 中无 $\varphi_j(x)$；若 $k_{-(j+1)}=k_{-j}=1$，则 $\psi_{j+1}(x)$ 与 $\psi_j(x)$ 必同时出现于 (2.12) 右边的乘积之中。同

样由 (2.10) 知

$$\psi_{j+1}(x)\psi_j(x)=\varphi_{j+1}(x)\varphi_j(x)\cdot\varphi_j(x)\varphi_{j-1}(x)$$
$$=\varphi_{j+1}(x)\varphi_{j-1}(x),$$

从而 (2.14) 中也不出现 $\varphi_j(x)$。

ii) 当 k 的相邻两个二进制代码 $k_{-(j+1)}\neq k_{-j}$, 此时相应地有

$$k'_{-j}=k_{-(j+1)}\oplus k_{-j}=1。$$

同样利用 (2.10) 可知 (2.14) 右边的乘积中必将出现因子 $\varphi_j(x)$。

综述 i), ii) 两种情形：若 k 的 Gray 码 $k'_{-j}=0$，则 (2.14) 右边的乘积中无 $\varphi_j(x)$ 这一项；若 $k'_{-j}=1$，则 (2.14) 中必出现 $\varphi_j(x)$。采用我们的记号，于是 (2.14) 式可改写为

$$wal_k(x)=\prod_{(j:k'_{-j}=1)}\varphi_j(x),$$

这就是 (2.6) 式。从而证明了 (2.12) 蕴含 (2.6)。

最后，把求 W 函数(表示为 R 函数乘积)的方法总结为下表。

求 W 函数的方法(步骤)

1．依自然序(求 $w_k(x)$)：

(1) 求出 k 的二进表示，

$$k=(k_{-r}\cdots k_{-1}k_0),$$

(2) 求出使 $k_{-j}=1$ 的那些附标 j，

(3) 对 (2) 中的 j 作出积，即为 $w_k(x)$：

$$\prod_{(j:k_{-j}=1)}\varphi_j(x),$$

2．依列率序(求 $wal_k(x)$)：

(1) 求出 k 的 Gray 码 k'，

(2) 作出 $w_{k'}(x)$ (依上述求 $w_{k'}(x)$ 的步骤)，

(3) 令 $wal_k(x)=w_{k'}(x)$。

§ 3 Walsh 函数的性质

W函数的性质很多，我们仅把若干基本性质汇集于此，并给予必要的证明。这里主要就列率序的 W 系$\{wal_k(x)\}$来论述。

性质 1°(乘法公式) 对一切 $x\in[0,1)$，有下述乘法公式

$$wal_k(x)\cdot wal_j(x)=wal_{k\oplus j}(x)。\qquad (2.15)$$

证 若 $k=j$, 则 $k\oplus j=0$，(2.15) 明显成立。若 $k\neq j$。设

$$k=\sum_{\nu=0}^{N-1}k_{-\nu}2^{\nu},\quad j=\sum_{\nu=0}^{N-1}j_{-\nu}2^{\nu},$$

$k_{-\nu}$、$j_{-\nu}\in\{0,1\}$。于是按伪加的定义，

$$k\oplus j=\sum_{\nu=0}^{N-1}l_{-\nu}2^{\nu},$$

这里 $l_{-\nu}=k_{-\nu}\oplus j_{-\nu}(\nu=0,1,\cdots,N-1)$。由 W函数的表示式(2.12)，并改写为下述形式(参看习题 2.4)

$$wal_k(x)=\psi_{N-1}^{k-(N-1)}\psi_{N-2}^{k-(N-2)}\cdots\psi_0^{k_0},$$

$$wal_j(x)=\psi_{N-1}^{j-(N-1)}\psi_{N-2}^{j-(N-2)}\cdots\psi_0^{j_0},$$

从而

$$wal_k(x)wal_j(x)$$

$$=(\psi_{N-1})^{k-(N-1)+j-(N-1)}(\psi_{N-2})^{k-(N-2)+j-(N-2)}\cdots(\psi_0)^{k_0+j_0}。$$

因 $$(\psi_i(x))^2=(\psi_i(x))^0\equiv1,$$

故上式各因子的指数上的加法运算可改为伪加运算。于是有

$$wal_k(x)wal_j(x)=\psi_{N-1}^{l-(N-1)}\psi_{N-2}^{l-(N-2)}\cdots\psi_0^{l_0}=wal_{k\oplus j}(x),$$

从而 (2.15) 得证。

读者可以考虑一下对于 W 系的真子集R函数系乘法公式 (2.15) 是否成立。

在涉及R函数的积分时，要用到如下的公式

$$\int_0^1 \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(x)\cdots\varphi_{n_s}(x)dx = 0, \qquad (2.16)$$

其中附标 n_ν ($\nu=1, \cdots, s$) 为任意不全为 0 的非负整数。公式 (2.16) 表明有限个 R 函数的乘积在区间 $[0, 1)$ 上的积分是零。

事实上，不妨设 $n_s > n_{s-1} > \cdots > n_1 \geqslant 0$, 把$[0,1)$分为 2^{n_s+1} 等分。在每个子区间

$$\left[\frac{\nu}{2^{n_s+1}}, \frac{\nu+1}{2^{n_s+1}}\right) \quad (\nu=0, 1, \cdots, 2^{n_s+1}-1)$$

上，$\varphi_{n_1}(x)$, $\varphi_{n_2}(x)$, $\cdots$, $\varphi_{n_{s-1}}(x)$分别是常数，其乘积记为 σ, σ 亦为常数 1 或 -1, 而 $\varphi_{n_s}(x)$ 相继地取 1 与 -1 (共有偶数次)。于是

$$\int_0^1 \varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(x)\cdots\varphi_{n_s}(x)dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^{n_s+1}-1} \int_{\nu/2^{n_s+1}}^{(\nu+1)/2^{n_s+1}} [\varphi_{n_1}(x)\cdots\varphi_{n_{s-1}}(x)]\varphi_{n_s}(x)dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^{n_s+1}-1} \sigma \int_{\nu/2^{n_s+1}}^{(\nu+1)/2^{n_s+1}} \varphi_{n_s}(x)dx = 0。$$

从而公式 (2.16) 成立。

由性质 1° 与 (2.16) 式立刻能推出 W 系的直交性。

性质 2°（标准直交性） W 系是 $[0, 1)$ 区间上的标准直交系，即

$$\int_0^1 wal_k(x)\ wal_j(x)dx = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j。\end{cases} \qquad (2.17)$$

证 若 $k=j$,

$$wal_k(x)\cdot wal_j(x) = [wal_k(x)]^2 \equiv 1,$$

(2.17)明显成立。若 $k \neq j$, $k \oplus j \neq 0$。设 $k \oplus j$ 的 Gray 码为 l, $l = G(k \oplus j) \neq 0$。令

$$l = 2^{n_p} + 2^{n_{p-1}} + \cdots + 2^{n_1},$$

其中$n_p>n_{p-1}>\cdots>n_1\geqslant 0$，则由 W 函数的定义 (2.6) 式知

$$wal_{k\oplus j}(x)=\varphi_{n_p}(x)\varphi_{n_{p-1}}(x)\cdots\varphi_{n_1}(x)。$$

由性质 1° 与 (2.16) 式便得 (2.17)：

$$\int_0^1 wal_k(x)\ wal_j(x)dx=\int_0^1 wal_{k\oplus j}(x)dx$$

$$=\int_0^1\varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(x)\cdots\varphi_{n_p}(x)dx=0。$$

特别，若于 (2.17) 中令 $j=0$，有

$$\int_0^1 wal_k(x)dx=\begin{cases}1,\ k=0,\\ 0,\ k\neq 0。\end{cases}$$

由此可见，每个 W 函数除 $wal_0(x)$ 以外在基本区间 $[0,1)$ 上的积分总是零。这个性质在以后要用到。

性质 3°（完整性） W 系是区间 $[0,1)$ 上的完整系。就是说，若定义在基本区间 $[0,1)$ 上的可积函数 $f(x)$（指 Lebesgue 可积）与所有的 $wal_k(x)$（或与所有的 $W_n(x)$）直交，则 $f(x)=0$ 在 $[0,1)$ 上几乎处处 (a.e.) 成立。

这个性质是下一节定理 1 的一个推论，并将在那里给予证明。性质 2° 与 3° 一起说明了 W 系是区间 $[0,1)$ 上的一个完整标准直交系。我们知道，R 系也是 $[0,1)$ 上的一个标准直交系，但是没有完整性，这正是 R 系的一个重要缺陷。可是，把 R 系扩充而获得的 W 系就具有完整性了。

性质 4°（可换群） W 系 $\{wal_k(x)\}$，$k=0,1,\cdots$，构成一个可换群（Abel 群）。系中首 2^n 个函数 $\{wal_0(x),\ wal_1(x),\ \cdots,\ wal_{2^n-1}(x)\}$ 所成的子集构成一个可换子群，$n=0,1,\cdots$。

证 关于构成 Abel 群运算的封闭性、可换性以及结合律由公式 (2.15) 得到保证。对 W 系而言，$wal_0(x)$ 充任单位元的角色，而 $wal_k(x)$ 的逆元就是它自已。故 W 系$\{wal_k(x)\}$

构成一可换群。另外，由于当 $0\leqslant k\leqslant 2^n-1$，$0\leqslant j\leqslant 2^n-1$ 时，有 $0\leqslant k\oplus j\leqslant 2^n-1$，从而知道构成群上运算的封闭性对子集 $\{wal_0(x), wal_1(x), \cdots, wal_{2^n-1}(x)\}$ 也是成立的。所以这个子集也构成一可换子群。

性质 5°（第二乘法公式） 对区间 $[0, 1)$ 中每个固定的 y，除去有限个点外，对其余的 $x\in[0, 1)$ 都有

$$wal_k(x)\cdot wal_k(y)=wal_k(x\oplus y),\quad k=0,1,\cdots。\tag{2.18}$$

证 这条性质是 R 函数的性质 3° 与 W 函数的定义 (2.6) 的直接结果。

由于 W 系 $\{wal_k(x)\}$ 与 $\{w_n(x)\}$ 仅是排列次序不同，并且它们的首 $2^r(r=0, 1, \cdots)$ 个函数的集是一样的，所以 W 函数的性质 1°—5° 对 $\{w_n(x)\}$ 系也是成立的（参看习题 2.8）。不过，对列率序的 $wal_k(x)$ 来说，还有另外的特殊性质 6° 与 7°。

性质 6°（奇偶性） 在整个实轴上除去一个可列集外，$wal_{2k}(x)$ 是偶函数，$wal_{2k+1}(x)$ 是奇函数。

证 由于 W 函数是具有周期 1 的函数，我们只要对 $|x|<1$ 的情形证明即可。设 $0\leqslant x<1$，并设

$$2k=\sum_{j=1}^{N-1}k_{-j}2^j\quad(\text{这时 } k_0=0),\quad k_{-j}\in\{0, 1\}。$$

由公式 (2.13)，知

$$\begin{aligned}wal_{2k}(-x)=wal_{2k}(1-x)&=\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{sgn}[\cos k_{-j}2^j\pi(1-x)]\\&=\prod_{j=1}^{N-1}\operatorname{sgn}[\cos(k_{-j}2^j\pi x)]=wal_{2k}(x)\\&\qquad\left(x\neq\frac{2j-1}{2^{j+1}},\ j=1, 2, \cdots, N-1\right)。\end{aligned}$$

故 $wal_{2k}(x)$ 是偶函数。又

$$wal_1(-x)=wal_1(1-x)=\mathrm{sgn}\,[\cos\pi(1-x)]$$
$$=\mathrm{sgn}\,[-\cos\pi x]=-\mathrm{sgn}\cos\pi x$$
$$=-wal_1(x)$$

$\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$，这说明 $wal_1(x)$ 是奇函数。最后，由乘法公式 (2.15)，有

$$wal_{2k+1}(x)=wal_{2k\oplus1}(x)=wal_{2k}(x)wal_1(x),$$

得出 $wal_{2k+1}(x)$ 在 $|x|<1$ 除有限个点外是奇函数。从而性质 6° 证毕。

性质 7°（变号次数） 每个 $wal_k(x)$ 在区间 $[0,1)$ 改变符号的次数恰好是 k 次。

证 对 $k=0$，$wal_0(x)=1$，函数不变号，即 $wal_0(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上改变符号的次数为 0 次。设 $k\neq0$，令 $k=2^{k_p}+2^{k_{p-1}}+\cdots+2^{k_1}(k_p>k_{p-1}>\cdots>k_1\geqslant0)$，据 (2.13′)，有

$$wal_k(x)=\psi_{k_p}(x)\psi_{k_{p-1}}(x)\cdots\psi_{k_1}(x),$$

其中每个因子都是 L 函数，由 (2.9)，

$$\psi_{k_i}(x)=\mathrm{sgn}\,(\cos 2^{k_i}\pi x),\quad i=1,2,\cdots,p。$$

因为 $\cos(2^{k_i}\pi x)$ 仅在通过 $x=1/2^{k_i+1}$ 的奇数倍时才改变符号在区间 $[0,1)$ 上它共改号 2^{k_i} 次，也就是 $\psi_{k_i}(x)$ 在 $[0,1)$ 上共改号 2^{k_i} 次。然而，当 $j\neq i$ 时，$\cos(2^{k_j}\pi x)$ 在通过上述点列时均不改号。因此，$\psi_{k_p}(x)$，$\psi_{k_{p-1}}(x)$，…，$\psi_{k_1}(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上改号次数分别为 2^{k_p}，$2^{k_{p-1}}$，…，2^{k_1} 次，并且当其中一个函数在某一点改号时，其余各函数均不变号。所以乘积 $\psi_{k_p}(x)\cdot\psi_{k_{p-1}}(x)\cdots\psi_{k_1}(x)$，即 $wal_k(x)$ 在 $[0,1)$ 上共改号 $2^{k_p}+2^{k_{p-1}}+\cdots+2^{k_1}=k$ 次。

从性质 4° 知道，W 系构成一个 Abel 群，而在第一章 §3 中已证明 p 进群的特征的全体在通常乘法运算下也是一个

Abel 群，现在简要论述这两者之间的关系，作为本节的结束。

设 G 为二进群($p=2$ 的情形)，即

$$G=\{\bar{x}: \bar{x}=(x_1x_2\cdots),\ x_j\in\{0,1\},\ j=1,2,\cdots\},$$

$\chi_n(\bar{x})$ 表示 G 上的基本特征函数：

$$\chi_n(\bar{x})=\begin{cases}1, & 若\ x_n=0,\\ -1, & 若\ x_n=1,\end{cases}\quad \bar{x}=(x_1x_2\cdots)\in G,$$

而以 Γ 表示 G 的全体特征所成的集，$\chi(\bar{x})$ 表示 Γ 的任一元，Γ 为特征群。G_0 表示 G 中 $\bar{x}=(x_1x_2\cdots x_n\cdots)$ 的分量从某一附标开始全出现 1 的那些 $\bar{x}$ 的集合，显然 G_0 是 G 的一个可列子集。对每个 $\bar{x}\in G$，令 $x=\lambda(\bar{x})$，其中 x 为 $\bar{x}$ 所对应的 $[0,1)$ 中的小数 $x=(0;x_1x_2\cdots)$。另外，对于每个 $x\in[0,1)$ 令 $\mu:\mu(x)=\bar{x}$ 为 λ 的逆。因为对 $[0,1)$ 中的二进有理数，我们约定只用有尽表示，所以映射 $\bar{x}=\mu(x)$ 把 $[0,1)$ 映到 $G-G_0$ 上。

先看 R 系。设 $x=(0;x_1x_2\cdots)\in[0,1)$，对每个 R 函数 $\varphi_{n-1}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$，据 (2.4) 式与基本特征函数 $\chi_n(\bar{x})$ 的定义，有

$$\varphi_{n-1}(x)=(-1)^{x_n}=\chi_n(\bar{x})=\chi_n(\mu(x)),$$

即
$$\varphi_{n-1}(x)=\chi_n(\mu(x)),\ x\in[0,1),\tag{2.19}$$

关系式 (2.19) 说明这样的事实，$[0,1)$ 上的 R 系 $\{\varphi_{n-1}(x)\}$ 在映射 $\bar{x}=\mu(x)$ 之下与 $G-G_0$ 上的基本特征集 $\{\chi_n(\bar{x})\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 之间建立了一一对应的关系。反之，对于每个 $\bar{x}\in G$，除一个可列集 G_0 之外，有关系式

$$\chi_n(\bar{x})=\varphi_{n-1}(\lambda(\bar{x}))。\tag{2.19′}$$

关系式 (2.19) 与 (2.19′) 建立了 $[0,1)$ 上的 R 系与 G 上基本特征集之间的联系。在这种意义下，可以说区间 $[0,1)$ 上的 R 系实质上等同于二进群 G 上的基本特征集

$\{\chi_n(\bar{x})\}$。

再看 W 系。我们就 $\{w_n(x)\}$ $(n=0, 1, \cdots)$ 来讨论。已经知道，二进群G上的特征 $\chi(\bar{x})$ 可表示成有限个基本特征函数的积，且这样的积显然是特征。于是，若令 $n=2^{n_s}+2^{n_{s-1}}+\cdots+2^{n_1}$ $(n_S>n_{S-1}>\cdots>n_1\geqslant 0)$，据 (2.7) 与 (2.19)，对 $0\leqslant x<1$ 有

$$\begin{aligned}w_n(x)&=\varphi_{n_s}(x)\varphi_{n_{s-1}}(x)\cdots\varphi_{n_1}(x)\\&=\chi_{n_s+1}(\mu(x))\chi_{n_{s-1}+1}(\mu(x))\cdots\chi_{n_1+1}(\mu(x)),\end{aligned}$$

于是，每个 $w_n(x)$ 与 Γ 中的一个元对应。并且不同的 W 函数所对应的 Γ 中的元也不同。反之，同样可知，对于每个 $\chi\in\Gamma$ 存在唯一的 W 函数 $w_n(x)$ 与之对应，并且对 $\bar{x}\in G$，除一可列集外有

$$\chi(\bar{x})=w_n(\lambda(\bar{x}))。$$

因此，我们可以把特征 $\chi(\bar{x})$ 与 W 函数 $w_n(x)$ 视为**等同**。于是得到下列性质：

性质 8° 区间 $[0,1)$ 上的 W 系等同于二进群G上的特征群 Γ。

顺便指出，若G是一般的 p 进(紧)群(第一章 §3)，那么它的特征群恰好等同于$[0, 1)$上的 p 进 W 系(见第二章 §6)。

有了这条性质以后，便可把 $[0, 1)$ 上的 W 系与群 G 的特征群对应起来。对一般的 p 进紧群G建立 Haar 测度、Haar 积分以及逻辑导数之后，就可以考虑群上的 Walsh 分析。这是研究 Walsh 函数的一个重要方法。

§4 按 Walsh 函数的展开

上一节讨论了 W 函数的一些基本性质，在那里我们已知

道 W 系与三角系一样，是一个完整标准直交系，因而可考虑可积函数按 W 系的级数展开问题。本节着重介绍按 W 系 $\{w_n(x)\}$ 的展开，并证明关于级数展开的(逐点)收敛定理，讨论 W 系数的某些性质与连续函数的级数展开的唯一性定理等。

设 $f(x)$ 以 1 为周期，并且是 $[0, 1)$ 上的可积函数。按照 Fourier 级数中的方法，将 $f(x)$ 按 W 系 $\{W_n(x)\}$ 作形式上的级数展开

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x), \tag{2.20}$$

其中

$$c_n = \int_0^1 f(x)\overline{w_n(x)}dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots。 \tag{2.21}$$

由于 $w_n(x)$ 是仅取 $+1, -1$ 的实函数，

$$\overline{w_n(x)} = w_n(x),$$

所以系数 c_n 实际上是

$$c_n = \int_0^1 f(x)w_n(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots。 \tag{2.21'}$$

称系数 c_n 为 $f(x)$ 的 Walsh-Fourier 系数，或简称为 **W 系数**。称对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Walsh-Fourier 展式，简称 $f(x)$ 的 **W 展式**(或 **W 级数**)。级数 (2.20) 的前面 k 项之和称为 $f(x)$ 的 W 展式的**第 k 部分和**，记为

$$S_k(f; x) \quad 或 \quad S_k(x),$$

即

$$S_k(f; x) = \sum_{n=0}^{k-1} c_n w_n(x)。 \tag{2.22}$$

下面考虑 $f(x)$ 的W展式在 $[0, 1)$ 上的逐点收敛性问题。也就是对每个 $x \in [0, 1)$，判定 $f(x)$ 的部分和序列$\{S_k(f; x)\}$ 当 $k \to \infty$ 时的极限是否存在，并且当极限存在时，极限值是否

等于 $f(x)$？

先证明两个引理。

引理 1 设 $0\leqslant a<1$ 为固定的数，$f(x)$ 是 $[0, 1)$ 上的可积函数，则

$$\int_0^1 f(x\oplus a)dx=\int_0^1 f(x)dx。\tag{2.23}$$

证 设 $a=(0; a_1a_2\cdots)$，$x\in[0, 1)$。将二进移位变换 $x\oplus a$ 记为 T_a，即 $T_a(x)=x\oplus a$。又设 N 为任意取定的自然数，把 $[0, 1)$ 等分为 2^N 个子区间

$I_{N,\nu}=\{x: \nu/2^N\leqslant x<(\nu+1)/2^N\}$, $\nu=0, 1, \cdots, 2^N-1$,
每个区间 $I_{N,\nu}$ 中的点 x 总可表示为

$$x=(0; x_1 x_2 \cdots x_N x_{N+1} \cdots),$$

其中首 N 位数字 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 只与 ν 有关，其余的数字 x_{N+1}, x_{N+2}, $\cdots$ 可以任意变动。因为对 $x\in I_{N,\nu}$,

$$T_a(x)=(0; x_1\oplus a_1\ x_2\oplus a_2\ \cdots\ x_N\oplus a_N\ \cdots)$$

只与 ν 和 a 有关，所以，只要 $T_a(x)$ 的二进表示不出现 1 的无限循环，总存在某个序号 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant 2^N-1$，使 $T_a(x)\in I_{N,\rho}$，并且 $I_{N,\nu}$ 中不同的点在 $I_{N,\rho}$ 中有不同的象，而不同的 ν 对应于不同的 ρ。这就是说，在二进移位变换之下，至多除去可列个点之外，每个区间 $I_{N,\nu}$ 的象是某个区间 $I_{N,\rho}$，不同的区间有不同的象。

因此，若 $K_{I_{N,\nu}}$ 表示区间 $I_{N,\nu}$ 上的特征函数

$$K_{I_{N,\nu}}(x)=\begin{cases}1, & x\in I_{N,\nu},\\ 0, & x\in I_{N,\nu},\end{cases} \quad \nu=0, 1, \cdots, 2^N-1,$$

则存在序号 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant 2^N-1$，使

$$K_{I_{N,\nu}}(x\oplus a)=K_{I_{N,\rho}}(x) \quad (\text{a. e.})。\tag{2.24}$$

据 $f(x)$ 的可积性，存在这样的阶梯函数 $C_N(x)$, $C_N(x)$ 在

每个 $I_{N,\nu}$ $(\nu=0, 1, \cdots, 2^N-1)$ 上分别取常数值，$|C_N(x)|\leqslant|f(x)|$ 以及

$$\lim_{N\to\infty} C_N(x)=f(x) \quad (\text{a. e.})。$$

若令

$$C_N(x)=\sum_{\nu=0}^{2^N-1} c_\nu K_{I_{N,\nu}}(x),$$

则由 (2.24) 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 C_N(x\oplus a)dx &= \sum_{\nu=0}^{2^N-1} c_\nu \int_0^1 K_{I_{N,\nu}}(x\oplus a)dx \\ &= \sum_{\rho=0}^{2^N-1} c_\rho \int_0^1 K_{I_{N,\rho}}(x)dx=\int_0^1 C_N(x)dx,\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 C_N(x\oplus a)dx=\int_0^1 C_N(x)dx。$$

利用这个等式与 Lebesgue 控制收敛定理立即得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x\oplus a)dx &= \lim_{N\to\infty}\int_0^1 C_N(x\oplus a)dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\int_0^1 C_N(x)dx=\int_0^1 f(x)dx。\end{aligned}$$

等式 (2.23) 称为**积分关于二进移位的不变性。**

引理 2 设 $0\leqslant x<1$，记

$$D_k(x)=\sum_{\nu=0}^{k-1} w_\nu(x) \tag{2.25}$$

（通常称 $D_k(x)$ 为 **Dirichlet 核**），则

$$D_{2^n}(x)=\begin{cases}2^n, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2^n}, \\ 0, & \dfrac{1}{2^n}\leqslant x<1。\end{cases} \tag{2.26}$$

从而

$$\int_0^1 D_{2^n}(x)dx=1。 \tag{2.27}$$

证 先证对于 $D_{2^n}(x)$ 有下述恒等式

$$D_{2^n}(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+\varphi_k(x))。\tag{2.28}$$

用数学归纳法。当 $n=1$ 时，

$$D_2(x)=w_0(x)+w_1(x)=1+\varphi_0(x),$$

故 (2.28) 式成立。假定 $n=m$ 已成立，即假定

$$D_{2^m}(x)=\prod_{k=0}^{m-1}(1+\varphi_k(x)),$$

则有

$$D_{2^{m+1}}(x)=\sum_{\nu=0}^{2^m-1}w_\nu(x)+\sum_{\mu=0}^{2^m-1}w_{2^m+\mu}(x)。$$

因为当 $0\leqslant\mu\leqslant 2^m-1$ 时，$2^m+\mu=2^m\oplus\mu$，且 $w_{2^m}(x)=\varphi_m(x)$，故

$$w_{2^m+\mu}(x)=w_{2^m}(x)w_\mu(x)=\varphi_m(x)w_\mu(x),$$

从而据归纳假设，得到

$$\begin{aligned}D_{2^{m+1}}(x)&=D_{2^m}(x)+\varphi_m(x)D_{2^m}(x)\\&=(1+\varphi_m(x))D_{2^m}(x)=\prod_{k=0}^{m}(1+\varphi_k(x))。\end{aligned}$$

这表明(2.28)对 $n=m+1$ 成立。因而对一切自然数 n，(2.28) 都成立。

其次，当 $0\leqslant x<1/2^n$ 时，n 个 R 函数 $\varphi_k(x)(k=0, 1, \cdots, n-1)$ 都取值 1，由 (2.28)得 $D_{2^n}(x)=2^n$；当 $1/2^n\leqslant x<1$ 时，这些 $\varphi_k(x)$ 中至少有一个取值为 -1，即 (2.28) 右边乘积中至少有一个因子为零，所以 $D_{2^n}(x)=0$。从而得 (2.26) 式。

最后，积分 (2.27) 是 (2.26) 的明显结果。于是引理证毕。

关于 $f(x)$ 的 w 展式，有下述收敛定理。

定理 1 设 $f(x)$ 以 1 为周期且在 $[0, 1)$ 上可积，$S_{2^n}(x)$ 为 $f(x)$ 的 W 展式的第 2^n 部分和，则

(i) 在区间 $[0, 1)$ 上几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n}(x) = f(x); \tag{2.29}$$

(ii) 若 $f(x)$ 在点 x 连续，则 (2.29) 在这一点成立；

(iii) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1)$ 上连续，则 (2.29) 在 $[0,1)$ 上一致成立，即 $S_{2^n}(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。

证 利用引理 1 与第二乘法公式（习题 2.8 (iii) 可把部分和 $S_k(x)$ 化为积分的形式。有

$$\begin{aligned}S_k(x) &= \sum_{n=0}^{k-1} c_n w_n(x) = \sum_{n=0}^{k-1}\int_0^1 f(t)w_n(t)w_n(x)dt\\ &= \int_0^1 f(t)\sum_{n=0}^{k-1} w_n(x\oplus t)dt = \int_0^1 f(t)D_k(x\oplus t)dt\\ &= \int_0^1 f(x\oplus t)D_k(t)dt,\end{aligned}$$

即

$$S_k(x) = \int_0^1 f(x\oplus t)D_k(t)dt。 \tag{2.30}$$

再由引理 2 对每个 $x\in[0, 1)$，得

$$S_{2^n}(x) = 2^n\int_0^{1/2^n} f(x\oplus t)dt。$$

先证 (ii)。设 x 是 $f(x)$ 的连续点。就是说，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(x, \varepsilon)>0$，当 $|x'-x|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$。取自然数 N，使得 $1/2^N<\delta$。当 $n>N$，且 $0\leqslant t<1/2^n$ 时，易知 $|x\oplus t-x|\leqslant t<1/2^n<\delta$，于是相应地有

$$|f(x\oplus t)-f(x)|<\varepsilon。$$

因此，当 $n>N$ 时，利用 (2.27) 与 (2.26) 得

$$\begin{aligned}S_{2^n}(x)-f(x) &= \int_0^1\{f(x\oplus t)-f(x)\}D_{2^n}(t)dt\\ &= 2^n\int_0^{1/2^n}\{f(x\oplus t)-f(x)\}dt。\end{aligned}$$

从而

$$|S_{2^n}(x)-f(x)|<2^n\int_0^{1/2^n}|f(x\oplus t)-f(x)|dt$$

$$<\varepsilon\quad(n>N),$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}S_{2^n}(x)=f(x)。$$

次证 (iii)。若 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上连续，则 (ii) 中的 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 与 x 无关，从而所取的自然数 N 与 x 无关，所以极限 (2.29) 在 $[0,1)$ 上一致成立。

最后证 (i)。设 x 是固定的二进无理点，x 总属于某个长度为 $1/2^n$ 的区间 $I_{n,\rho}$ 的内部，即

$$\frac{\rho}{2^n}<x<\frac{\rho+1}{2^n},$$

这里 ρ 是 $0,1,\cdots,2^n-1$ 中的某一个数，它依赖于 x。当 $0\leqslant t<1/2^n$ 时，$u=x\oplus t\in I_{n,\rho}$ (除可列个 t 以外)，即 $I_{n,0}$ 在二进移位变换 $u=x\oplus t$ 下的象是 $I_{n,\rho}$。记

$$|I_{n,\rho}|=\frac{1}{2^n}$$

为区间 $I_{n,\rho}$ 的长，于是部分和 $S_{2^n}(x)$ 可改写为

$$S_{2^n}(x)=\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}}f(u)du,\quad x\in I_{n,\rho}。$$

因为 $f(x)$ 是 $[0,1)$ 上的可积函数，据 L 积分的性质，几乎处处有(第一章 §4 的 (ix))

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=f(x)。$$

因而使上式成立的点 x 所成集合 E 的测度为1。下面证明，对 $x\in I_{n,\rho}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}}f(u)du=f(x)\quad(I_{n,\rho}\text{依赖于}x)。$$

令
$$\delta_n = x - \frac{\rho}{2^n},\quad \Delta_n = \frac{\rho+1}{2^n} - x,$$
就有 $|I_{n,\rho}| = \delta_n + \Delta_n$。考虑
$$\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}} f(u)\,du = \frac{1}{\delta_n+\Delta_n}\int_{\rho/2^n}^{(\rho+1)/2^n} f(u)du$$
$$= \frac{1}{\delta_n+\Delta_n}\left\{\int_{x-\delta_n}^{x} f(u)du + \int_{x}^{x+\Delta_n} f(u)du\right\},$$
注意到当 $n\to\infty$，δ_n，$\Delta_n\to 0$，从而对所述的 x，有
$$\frac{1}{\delta_n}\int_{x-\delta_n}^{x} f(u)\,du = \frac{1}{-\delta_n}\int_{x}^{x-\delta^n} f(u)du \to f(x) \quad (n\to\infty)$$
与
$$\frac{1}{\Delta_n}\int_{x}^{x+\Delta_n} f(u)du \to f(x) \quad (n\to\infty),$$
于是对任意指定的 $\varepsilon>0$，存在 N_ε，使当 $n>N_\varepsilon$ 时有
$$\frac{1}{\delta_n}\int_{x-\delta_n}^{x} f(u)du = f(x) + \varepsilon_n',$$
$$\frac{1}{\Delta_n}\int_{x}^{x+\Delta_n} f(u)du = f(x) + \varepsilon_n'',$$
且
$$|\varepsilon_n'| + |\varepsilon_n''| < \varepsilon。$$
因而据
$$\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}} f(u)du = \frac{\delta_n}{\delta_n+\Delta_n}\left\{\frac{1}{\delta_n}\int_{x-\delta_n}^{x} f(u)du\right\}$$
$$+ \frac{\Delta_n}{\delta_n+\Delta_n}\left\{\frac{1}{\Delta_n}\int_{x}^{x+\Delta_n} f(u)du\right\}$$
$$= f(x) + \frac{\delta_n}{\delta_n+\Delta_n}\varepsilon' + \frac{\Delta_n}{\delta_n+\Delta_n}\varepsilon'',$$
得
$$\left|\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}} f(u)du - f(x)\right| < |\varepsilon_n'| + |\varepsilon_n''| < \varepsilon \quad (n>N_\varepsilon)。$$
也就是说
$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|I_{n,\rho}|}\int_{I_{n,\rho}} f(u)du = f(x)。$$

从而 (2.29) 在 [0, 1) 上几乎处处成立。 定理 1 全部证毕。

利用定理 1 立即可证明一重要结论(第二章§ 3性质 3°)：W 系是完整的。事实上，设 $f(x)$ 是 [0, 1) 上的可积函数，且与所有的 $w_n(x)$ 直交，即 (2.21′) 式所决定的 W 系数 $c_n=0$ ($n=1, 2, \cdots$)，则由定理 1 的 (i)，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{2^n-1} c_\nu w_\nu(x)=f(x)$$

在 [0, 1) 上几乎处处成立。 因为所有的 $c_n=0$，上面的和为 0，故得 $f(x)=0$ 在 [0, 1) 上几乎处处成立。所以 W 系是一个完整系。

特别，若 $f(x)$ 是 [0,1) 上的连续函数，且所有的 W 系数 $c_n=0$ ($n=0, 1, \cdots$)，同样由定理 1 的 (iii) 知 $f(x)\equiv 0$ 在 [0, 1) 上处处成立。由此推出下述(周期为 1 的)连续函数W展式的唯一性定理。

推论 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，若 $f(x)$ 的一切 W 系数 $c_n=0$，则在整个实轴上 $f(x)\equiv 0$。

注意，定理 1 只考虑了部分和序列$\{S_k(x)\}$的特殊子序列$\{S_{2^n}(x)\}$ ($k=2^n$ 情形)，当 $n\to\infty$ 时的收敛性。在定理 1 的条件下尚不能推出 $S_k(x)$ 本身的收敛性。实际上，我们可以构造这样一个(周期)连续函数，它的 W 展式部分和序列在该函数的某一连续点处发散(参考本节例 4)。

关于囿变函数的展式的收敛性问题，我们叙述 J.L.Walsh 的原始结果而不加证明，参阅 [24] 与 [7]。

定理 2 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的囿变函数，那么

(i) 若 x_0 为 $f(x)$ 的连续点或二进有理点，则 $S_k(x_0)$ 收敛于 $f(x_0)$ ($k\to\infty$)；

(ii) 若 x_0 既非 $f(x)$ 的连续点又非二进有理点，则 $S_k(x_0)$

发散($k\to\infty$)。

注意，定理 2 的结论与三角级数中的 Dirichlet 收敛定理并不完全类似。

上面讨论了可积函数 $f(x)$ 按 W 系 $\{W_n(x)\}$ 的展开。类似地，也可讨论按 $\{wal_k(x)\}$ 的展开。在工程技术上常用的是后者。因为 $\{wal_k(x)\}$ 与 $\{w_n(x)\}$ 仅是排序不同，并且它们的首 $2^s(s=0, 1, \cdots)$ 个函数的集相同，所以上述定理对 $\{wal_k(x)\}$ 照样成立，仅需在书写记号上作适当的改变。

现在举几个例子。

例 1 设 c 为常数，求

$$f(x)=\begin{cases} c, & 0\leqslant x<1/2, \\ -c, & 1/2\leqslant x<1 \end{cases}$$

的 W 展式。

【解】 写出 $f(x)$ 关于系 $\{w_n(x)\}$ 的展式

$$f(x)\sim c_0w_0(x)+c_1w_1(x)+c_2w_2(x)+\cdots,$$

据 (2.21) 式求得 $c_0=0$, $c_1=c$, $c_n=0$ $(n\geqslant 2)$。所以

$$f(x)=cw_1(x)。$$

例 2 设 $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0, 1)$。试求 $f(x)$ 关于W系 $\{wal_k(x)\}_0^\infty$的展式(展至首五项)。

【解】 设

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k wal_k(x),$$

其中 W 系数 a_k 为

$$a_k=\int_0^1 f(x)wal_k(x)dx。$$

由此计算出 W 系数

$$a_0=\int_0^1\sin\pi x wal_0(x)dx=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\int_0^1 \sin \pi x wal_1(x)dx$$
$$=\int_0^{1/2} \sin \pi x dx-\int_{1/2}^1 \sin \pi x\, dx=0,$$

$$a_2=\int_0^1 \sin \pi x\, wal_2(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^{1/4}-\int_{1/4}^{3/4}+\int_{3/4}^1\right\} \sin \pi x dx=\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2}),$$

$$a_3=\int_0^1 \sin \pi x\, wal_3(x)dx=0,$$

$$a_4=\int_0^1 \sin \pi x\, wal_4(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^{1/8}-\int_{1/8}^{3/8}+\int_{3/8}^{5/8}-\int_{5/8}^{7/8}+\int_{7/8}^1\right\} \sin \pi x\, dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(1-2\cos\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{3\pi}{8}\right),$$

……。

据定理 2，有

$$\sin \pi x=\frac{2}{\pi}wal_0(x)+\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2})wal_2(x)$$
$$+\frac{2}{\pi}\left(1-2\cos\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{3\pi}{8}\right)wal_4(x)+\cdots.$$

例 3 试求 $f(x)=x$ 的 W 展式，$x\in[0,1)$。

【解】 对 $x\in[0,1)$，设

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n 2^{-n},\quad x_n\in\{0,1\}.$$

由 R 函数性质 2°（参看（2.4）式）

$$\varphi_{n-1}(x)=(-1)^{x_n}=1-2x_n,$$

因此有

$$x_n=\frac{1-\varphi_{n-1}(x)}{2},$$

把上式代入 x 的表达式便得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{n-1}(x)}{2}2^{-n},$$

但

$$\varphi_{n-1}(x)=wal_{2^{n}-1}(x),$$

于是整理后即得

$$x=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(n+1)}wal_{2^{n}-1}(x),\quad x\in[0,1)。$$

这个例题将在以后用到。

例 4 连续函数的 W 展式 (2.20) 未必收敛的例子。

我们不予证明地给出一个处处连续的函数 $f(x)$，它的 W 展式 (2.20) 在指定点 x_0（例如 $x_0=0$）处发散。或者说，$f(x)$ 的 W 级数部分和序列 $\{S_k(f;x_0)\}$ 是一个发散序列 $(k\to\infty)$。

先定义两个辅助函数序列 $\{p_n(x)\}$ 与 $\{f_n(x)\}$。令

$$p_n(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in[0,1/2^{2n^4}),\\ (-1)^j, & 若\ x\in[1/2^j,1/2^{j-1}),\\ 0, & 若\ x\in[1/2^{2(n-1)^4},1),\end{cases}$$
$$对\ 2(n-1)^4+1\leqslant j\leqslant 2n^4,$$

$$p_n(x+1)=p_n(x)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

与

$$f_0(x)=\begin{cases}x, & 若\ x\in[0,\ 1/2],\\ 1-x, & 若\ x\in[1/2,\ 1]。\end{cases}$$

$$f_0(x+1)=f_0(x)。$$

$$f_n(x)=f_0(2^n x),\quad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

再定义正整数序列 m_n 为

$$m_n=\sum_{\nu=0}^{n^4-(n-1)^4-1}2^{2(n-1)^4+2\nu},\quad n=1,\ 2,\ \cdots。$$

于是所希望的函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r^2}p_r(x)f_{2r^4}(x)w_{m_r}(x)。$$

可以证明

（i）$f(x)$ 是实轴上以 1 为周期的连续函数；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} S_{m_n}(f;0)=+\infty$。

可见 $S_k(f;0)$ $(k\to\infty)$ 发散，即连续函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 W 展式发散。

由于详细证明冗长，在此从略，这里仅作简要附注。结论 (i) 是较明显的。关于 (ii)，若 $D_k(x)$ 是 (2.25) 所示的 Dirichlet 核，便有

$$\begin{aligned}S_{m_n}(f;0)&=\int_0^1 f(t)D_{m_n}(t)dt\\&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r^2}\int_0^1 p_r(t)f_{2r^4}(t)w_{m_r}(t)D_{m_n}(t)dt\\&=\frac{1}{n^2}\int_0^1 p_n(t)f_{2n^4}(t)w_{m_n}(t)D_{m_n}(t)dt\\&\quad+\left(\sum_{r=0}^{n-1}+\sum_{r=n+1}^{\infty}\right)\frac{1}{r^2}\int_0^1 p_r(t)f_{2r^4}(t)w_{m_r}(t)D_{m_n}(t)dt\\&\equiv P_n+Q_n+R_n。\end{aligned}$$

利用函数 $D_k(x)$ 的一种分解公式（见习题 2.12）、$p_n(x)$、$f_n(x)$ 的定义以及 (2.26) 式可以证明，当 $n\to\infty$ 时

$$P_n\to+\infty,\ Q_n\to0,\ R_n\to0。$$

例 5 设 $f(t)$ 是以 1 为周期的信号。在每个周期内发出长度为 1/8 的信号波 01110011（图 2.4），试用 W 函数来合成 $f(t)$。

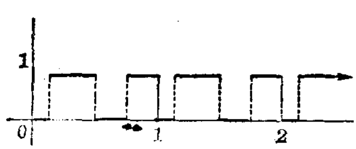


图 2.4

【解】 将区间 [0,1) 分为 $2^3=8$ 个小区间

$$I_\lambda=\left\{x:\frac{\lambda}{8}\leqslant t<\frac{\lambda+1}{8}\right\}\quad(\lambda=0,1,\cdots 8),$$

函数 $f(t)$ 在 I_λ 上取值为 f_λ，f_λ 依次等于0，1，1，1，0，0，1，1。把 $f(t)$ 展为 W 级数，由定理 2

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k wal_k(t),$$

其中 W 系数

$$a_k=\int_0^1 f(t)\,wal_k(t)dt=\sum_{\lambda=0}^{2^3-1}\int_{I_\lambda}f(t)wal_k(t)dt$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{2^3-1}f_\lambda\int_{I_\lambda}wal_k(t)dt,$$

对 $0\leqslant k\leqslant 2^3-1$，$wal_k(t)$ 在每个 $I_\lambda(\lambda=0,\cdots,2^3-1)$ 上取常数值，记为 $w_{k\lambda}$（习题 2.7），用 $|I_\lambda|$ 表示 I_λ 的长$\left(\text{这里 }|I_\lambda|=\frac{1}{8}\right)$，于是

$$a_k=\frac{1}{|I_\lambda|}\sum_{\lambda=0}^{2^3-1}f_\lambda w_{k\lambda}\quad(k=0,1,\cdots,2^3-1)。$$

对 $k\geqslant 2^3$，由习题 2.10 的 (ii) 易知

$$\int_{I_\lambda}wal_k(t)dt=0\quad(k\geqslant 2^3,\ \lambda=0,1,\cdots,2^3-1),$$

表示 $a_k=0\ (k\geqslant 2^3)$，因此 $f(t)$ 可由 W 系中首八个函数合成

$$f(t)=\sum_{k=0}^{7}a_k wal_k(t),$$

且

$$a_k=\frac{1}{8}\sum_{\lambda=0}^{7}f_\lambda w_{k\lambda}。$$

计算得

$$f(t)=\frac{1}{8}\{5wal_0(t)+wal_1(t)+wal_2(t)$$
$$-3wal_3(t)-wal_4(t)-wal_5(t)$$
$$-wal_6(t)-wal_7(t)\}。$$

系数 a_k 可按表 2.3 的格式计算。

表 2.3

λ		0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum_{\lambda=0}^{7} f_\lambda w_{k\lambda}$	a_k
f_λ		0	1	1	1	0	0	1	1		
$wal_k(x)$ 即 $w_{k\lambda}$	$k=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	5	$\frac{5}{8}$
	$k=1$	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	$\frac{1}{8}$
	$k=2$	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	$\frac{1}{8}$
	$k=3$	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	−3	$-\frac{3}{8}$
	$k=4$	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	$-\frac{1}{8}$
	$k=5$	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	$-\frac{1}{8}$
	$k=6$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	$-\frac{1}{8}$
	$k=7$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	$-\frac{1}{8}$

从这个实例可知，周期的脉冲信号(方波)可以用有限个 W 函数合成。一般说来，当信号的码长为 $N=2^n$ 型时，信号就可由 W 系中的首 2^n 个 W 函数来合成。当码长 N 不足 2^n 型时，可凑加 0 码，使成为 2^n 型。例如，某周期信号所代表的码是 10111，$N=5$，在处理时，我们可以把信号改为 10111000，使化为 $N=8=2^3$ 型。

下面介绍有关 W 系数的两个定理，先看 W 系数的二进移位律，就是

定理 3 设可积函数 $f(x)$ 的 W 系数是 $\{c_n\}$，h 是任一固定的数 $(0\leqslant h<1)$，则 $f(x\oplus h)$ 的 W 系数是 $\{c_n w_n(h)\}$，$n=0, 1, 2, \cdots$。

证 由引理 1 与第二乘法公式（习题 2.8(iii)）得

$$\int_0^1 f(x\oplus h)w_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)w_n(x\oplus h)\,dx$$

$$=\int_0^1 f(x)w_n(x)\,w_n(h)\,dx=c_n w_n(h),\quad n=0, 1, \cdots。$$

所以 $f(x\oplus h)$ 的 W 系数是 $\{c_n w_n(h)\}$。

设 $\{c_n\}$ $(n=0, 1, \cdots)$ 是可积函数 $f(x)$ 的 W 系数，$\|f\|_1$ 是 $f(x)$ 在空间 $L_{[0,1)}$ 的范数，即

$$\|f\|_1\equiv\int_0^1 |f(x)|\,dx。$$

由 W 系数的定义 (2.21′) 有

$$|c_n|\leqslant\int_0^1 |f(x)|\,|w_n(x)|\,dx=\|f\|_1,$$

由此断言 $\{c_n\}$ 是一个有界数列。不仅如此，我们还可进一步证明 $\{c_n\}$ 是一个零数列（即 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$）。此结果对应于 Fourier 分析中的 **Riemann-Lebesgue** 引理。

定理 4 设 $f(x)$ 是 $[0, 1)$ 上的可积函数，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f(x)w_k(x)dx=0。$$

证 分 $f(x)$ 为特征函数，阶梯函数与一般可积函数三种情形来证明。

首先，设 $[\alpha, \beta)$ 为 $[0, 1)$ 的任意子区间，$f(x)$ 是 $[\alpha, \beta)$ 上的特征函数，即

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[\alpha, \beta),\\ 0, & x\overline{\in}[\alpha, \beta)。\end{cases}$$

任意指定$\varepsilon>0$，先取正整数ρ足够大，使其满足(i) $\frac{1}{2^\rho}<\frac{\varepsilon}{2}$，(ii) 当把区间$[0, 1)$ 2^ρ等分以后，使α与β分别落在不同的子区间内。于是存在正整数N_1与N_2 $(0<N_1\leqslant N_2\leqslant 2^\rho-1)$，使

$$\frac{N_1-1}{2^\rho}\leqslant\alpha<\frac{N_1}{2^\rho},\quad \frac{N_2}{2^\rho}\leqslant\beta<\frac{N_2+1}{2^\rho},$$

从而

$$0<\frac{N_1}{2^\rho}-\alpha\leqslant\frac{1}{2^\rho}<\frac{\varepsilon}{2},\quad 0\leqslant\beta-\frac{N_2}{2^\rho}<\frac{1}{2^\rho}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

当$k>2^\rho$时，考察

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)w_k(x)\,dx&=\int_\alpha^\beta w_k(x)dx\\&=\left(\int_\alpha^{N_1/2^\rho}+\int_{N_1/2^\rho}^{N_2/2^\rho}+\int_{N_2/2^\rho}^{\beta}\right)w_k(x)dx\\&\equiv I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

计算积分I_2，

$$I_2=\int_{N_1/2^\rho}^{N_2/2^\rho}w_k(x)dx=\sum_{\lambda=1}^{N_2-N_1}\int_0^{2^{-\rho}}w_k\left(t+\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}\right)dt。$$

注意到，当$0\leqslant t<2^{-\rho}$时，有

$$t+\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}=t\oplus\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}\quad(\lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ N_2-N_1),$$

从而几乎处处有

$$w_k\left(t+\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}\right)=w_k(t)\,w_k\left(\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}\right),$$

于是I_2变形为

$$I_2=\sum_{\lambda=1}^{N_2-N_1}w_k\left(\frac{N_1+\lambda-1}{2^\rho}\right)\int_0^{2^{-\rho}}w_k(t)dt。$$

但易证

$$\int_0^{2^{-\rho}}w_k(x)dx=0\quad(k>2^\rho),$$

从而推知 $I_2=0$。其实，若 $k>2^\rho$，令

$$k=2^{n_s}+2^{n_{s-1}}+\cdots+2^{n_1}\quad(n_s>n_{s-1}>\cdots>n_1\geqslant 0),$$

便知 $n_s\geqslant\rho$。据(2.7′)，

$$w_k(x)=\varphi_{n_s}(x)\varphi_{n_{s-1}}(x)\cdots\varphi_{n_1}(x)\quad(n_s\geqslant\rho)。$$

现在把区间 $[0,2^{-\rho})$ 分为 $2^{n_s-\rho+1}$ 等分，在每个小区间

$$[\nu/2^{n_s+1},\ (\nu+1)/2^{n_s+1}),\quad \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^{n_s-\rho+1}-1$$

上 $\varphi_{n_1}(x)$，$\varphi_{n_2}(x)$，$\cdots$，$\varphi_{n_{s-1}}(x)$ 分别取常数值，而 $\varphi_{n_s}(x)$ 相继取 1 与 -1（共有偶数次）。因此当 $k>2^\rho$ 时

$$\int_0^{2^{-\rho}} w_k(x)\,dx=\int_0^{2^{-\rho}}[\varphi_{n_1}(x)\varphi_{n_2}(x)\cdots\varphi_{n_{s-1}}(x)]\varphi_{n_s}(x)dx$$

$$=\sum_{\nu=0}^{2^{n_s-\rho+1}-1}\int_{\nu/2^{n_s+1}}^{(\nu+1)/2^{n_s+1}}[\varphi_{n_1}(x)\cdots\varphi_{n_{s-1}}(x)]\varphi_{n_s}(x)dx=0。$$

关于 I_1 与 I_3，有

$$|I_1|\leqslant\int_\alpha^{N_1/2^\alpha}|w_k(x)|dx=\frac{N_1}{2^\alpha}-\alpha<\frac{\varepsilon}{2},$$

同理 $|I_3|<\varepsilon/2$。所以

$$\left|\int_0^1 f(x)w_k(x)\,dx\right|=|I_1+I_3|\leqslant|I_1|+|I_3|<\varepsilon$$

$$(k>2^\rho)。$$

这说明，当 $f(x)$ 是特征函数时定理 2 成立。

其次，设 $f(x)$ 是 $[0,1)$ 上的阶梯函数。由于 $f(x)$ 可表示为有限个特征函数的线性组合，因而这时定理也成立。

最后，设 $f(x)$ 是 $[0,1)$ 上的任一可积函数。由 L 积分的性质，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上的积分可由阶梯函数的积分来逼近。即对任意指定的 $\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $T(x)$，使得

$$\int_0^1|T(x)-f(x)|dx<\varepsilon/2。$$

由于定理已对阶梯函数 $T(x)$ 成立， 所以可取 K 足够大，当 $k>K$ 时

$$\left|\int_0^1 T(x)w_k(x)\,dx\right|<\varepsilon/2。$$

于是，当 $k>K$ 时

$$\left|\int_0^1 f(x)w_k(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1 (f(x)-T(x))w_k(x)dx+\int_0^1 T(x)w_k(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_0^1 |f(x)-T(x)|dx+\left|\int_0^1 T(x)w_k(x)dx\right|<\varepsilon。$$

定理全部证毕。

§5 逼近定理

上节的定理 1 (iii) 告诉我们，若给定了区间 $[0, 1)$ 上的连续函数 $f(x)$（这里总认为 $f(0)=f(1)$，因而能以 1 为周期延拓到整个实轴上），存在函数序列 $A_n(x)\equiv S_{2^n}(f; x)$，在 $[0, 1)$ 上一致收敛于 $f(x)$，或 $A_n(x)$ 一致逼近于 $f(x)$。一般地，设类 $C_{[0,1)}$ 表示 $[0, 1)$ 上所有连续函数的全体，对给定的 $f\in C_{[0,1)}$，若有函数列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 使范数

$$\sup_{x\in[0,1)}|f(x)-f_n(x)|$$

当 $n\to\infty$ 时收敛于零，便说 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上**一致逼近于** $f(x)$。

除此之外，我们还可考虑其它形式的逼近。其中较常见的一种就是平均逼近。设类 $L^q_{[0,1)}$ 表示区间 $[0, 1)$ 上的 q 幂可积函数的全体 $(1\leqslant q<\infty)$，即 $f\in L^q_{[0,1)}$ 当且仅当

$$\|f\|_q=\left(\int_0^1 |f(x)|^q dx\right)^{1/q}<\infty。$$

对于给定的 $f\in L^q_{[0,1)}$，若有函数列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2\cdots)$，使范数

$$\|f_n - f\|_q = \left(\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于零，便称 $f_n(x)$ (q 幂) **平均逼近于** $f(x)$ 或平均收敛于 $f(x)$。

本节主要讨论用 $f(x)$ 的 W 级数部分和序列及其算术平均值序列一致逼近于 $f(x)$ 的定理，也论及它们平均逼近于 $f(x)$ 的问题。

引理 1 设 $D_n(x)$ 为 (2.25) 所示的 Dirichlet 核，则

(i) $\int_0^1 D_n(x)\,dx = 1$;

(ii) $|D_n(x)| < 2/x$, 对一切 $0<x<1$, $n=1, 2, \cdots$;

(iii) $\|D_n\|_1 = \int_0^1 |D_n(x)|\,dx = O(\log n)$, $\quad n\to\infty$。

证 (i) 由 $w_0(x)=1$ 与

$$\int_0^1 w_v(x)\,dx = 0 \quad (v>0)$$

直接推得。

(ii) 对于每个 $0<x<1$，设 $2^{-n_1}<x\leqslant 2^{-n_1+1}$。令 $n=p2^{n_1}+q$ $0\leqslant q<2^{n_1}$。于是

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{v=0}^{n-1} w_v(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{2^{n_1}-1} w_{k2^{n_1}+s}(x) + \sum_{r=0}^{q-1} w_{p2^{n_1}+r}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{p-1} w_{k2^{n_1}}(x)\sum_{s=0}^{2^{n_1}-1} w_s(x) + w_{p2^{n_1}}(x)\sum_{r=0}^{q-1} w_r(x)\\
&= D_{2^{n_1}}(x)\left\{\sum_{k=0}^{p-1} w_{k2^{n_1}}(x)\right\} + w_{p2^{n_1}}(x)\,D_q(x),
\end{aligned}$$

据 (2.26) 式，当 $x>2^{-n_1}$ 时，$D_{2^{n_1}}(x)=0$。因而

$$|D_n(x)| = |D_q(x)| \leqslant q < 2^{n_1} < 2/x, \quad n=0, 1, \cdots。$$

关于 (iii)。由 (ii) 知 $|D_n(x)|<\min(n, 2/x)$，于是

$$\|D_n\|_1=\int_0^1|D_n(x)|dx\leqslant\int_0^{2/n}ndx+\int_{2/n}^1\frac{2}{x}dx$$
$$=O(\log n)\quad(n\to\infty)。$$
引理证毕。

引理 1 (iii) 告诉我们 Dirichlet 核 $D_n(x)$ 的 $L^1(0,1)$ 范数(通常称为 Lebesgue 常数) $\|D_n\|_1$ 增长的阶为 $O(\log n)$。且可以证明 $\|D_n\|_1$ 的阶不低于 $\log n$。这样，范数列 $\{\|D_n\|_1\}$ 是无界的。因此，必有连续函数，它的 W 级数的部分和 $s_n(f;x)$ 不收敛于 $f(x)$ $(n\to\infty)$（参看本章 § 4 例 4)。为了使序列 $\{s_n(f;x)\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛，甚至能一致逼近于函数 $f(x)$，必须对 $f(x)$ 加强条件，对此有下述的 **Dini-Lipschitz 定理**（也参看第四章 § 1 推论 1)。

定理 1 设 $f(x)$ 是 $[0,1)$ 上的连续函数，$\omega(\delta)$ 为 $f(x)$ 的连续模
$$\omega(\delta)=\max_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|,\quad 0\leqslant x,\ y<1。$$
若 $\omega(\delta)$ 满足
$$\lim_{\delta\to0+}\omega(\delta)\log\frac{1}{\delta}=0,\tag{2.31}$$
则 $f(x)$ 的 W 展式一致收敛于 $f(x)$。

证 对任意正整数 k，令 $k=2^n+k'$，$0\leqslant k'<2^n$。考察
$$s_k(x)-s_{2^n}(x)=\sum_{v=0}^{k'-1}c_{2^n+v}w_{2^n+v}(x)$$
$$=\sum_{v=0}^{k'-1}w_{2^n+v}(x)\int_0^1 f(t)w_{2^n+v}(t)dt$$
$$=\int_0^1 w_{2^n}(x)\,w_{2^n}(t)\,D_{k'}(x\oplus t)\,f(t)\,dt$$
$$=\varphi_n(x)\int_0^1\varphi_n(t)\,D_{k'}(x\oplus t)\,f(t)\,dt。\tag{2.32}$$
因为对任何 $v<2^n$，$w_v(2^{-(n+1)})=1$，所以

$$D_{k'}(z\oplus z^{-(n+1)})=\sum_{\nu=0}^{k'-1}w_\nu(z\oplus 2^{-(n+1)})$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k'-1}w_\nu(z)w_\nu(2^{-(n+1)})=D_{k'}(z);$$

又因为

$$\varphi_n(2^{-(n+1)})=\varphi_0(2^n2^{-(n+1)})=\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right)=-1,$$

同样有

$$\varphi_n(t\oplus 2^{-(n+1)})=\varphi_n(t)\cdot\varphi_n(2^{-(n+1)})=-\varphi_n(t)。$$

于是，把 (2.32) 中的积分变量作二进移位变换 $t\oplus 2^{-(n+1)}$，据 (2.23)，知 (2.32) 变形为

$$s_k(x)-s_{2^n}(x)=-\varphi_n(x)\int_0^1\varphi_n(t)D_{k'}(x\oplus t)f(t\oplus 2^{-(n+1)})dt。$$

把此式与 (2.32) 式相加，便得

$$2(s_k(x)-s_{2^n}(x))$$

$$=\varphi_n(x)\int_0^1\varphi_n(t)D_{k'}(x\oplus t)\{f(t)-f(t\oplus 2^{-(n+1)})\}dt,$$

从而

$$|s_k(x)-s_{2^n}(x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\max_{0<t<1}|f(t)-f(t\oplus 2^{-(n+1)})|\int_0^1|D_{k'}(x\oplus t)|dt。$$

因为

$$|t\oplus 2^{-(n+1)}-t|\leqslant 2^{-(n+1)},$$

所以由引理 1(iii) 与条件 (2.31) 推出

$$|S_k(x)-S_{2^n}(x)|\leqslant\frac{1}{2}\omega(2^{-(n+1)})\|D_{k'}\|_1$$

$$\leqslant\omega(2^{-n})O(\log 2^n)=o(1)。$$

另外，由本章 § 4 定理 1 (iii) 有

$$|S_{2^n}(x)-f(x)|=o(1)\quad(n\to\infty),$$

因此，注意到 $k=2^n+k'$, $0\leqslant k'<2^n$, 有

$$|S_k(x)-f(x)|\leqslant|S_{k'}(x)-S_{2^n}(x)|+|S_{2^n}(x)-f(x)|$$
$$=o(1)\quad(n\to\infty)。$$

从而定理1证毕。

从定理1看出，用 $\{S_n(f;x)\}$ 作为连续函数 $f(x)$ 的一致逼近序列时须对 $f(x)$ 有较强的限制。为了能去掉除连续性外的其他附加条件，而仍能有一致逼近于类 $C_{[0,1)}$ 上的任一函数的结论，利用部分和序列 $\{S_n(f;x)\}$ 是不适宜的。必须采用适当的办法来生成新的序列，这就产生了各种求和法。其中最简单的一种是由 $f(x)$ 的 W 展式部分和 $S_k(f;x)$ 的算术平均生成的序列 $\{\sigma_n(f;x)\}$,

$$\sigma_n(f;x)=\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k(f;x),$$

通常称 $\sigma_n(f;x)$ 为 $f(x)$ 的 W 级数的 **$(C,1)$ 和或 Fejér 和**。我们将会明了，对于空间 $C_{[0,1)}$ 中的任一函数 $f(x)$ 而言，序列 $\sigma_n(f;x)$ 确是一致逼近序列。

设 $D_k(x)$ 为 (2.25) 所示的 Dirichlet 核，称

$$K_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_k(x),\quad n=1,2,\cdots \tag{2.33}$$

为 **Fejér 核**。$K_n(x)$ 有下述性质：

引理2 设 $K_n(x)$ 为 Fejér 核，那么有

(i) $\int_0^1 K_n(x)\,dx=1,\quad n=1,2,\cdots;$

(ii) $|K_n(x)|<2/x$, 对一切 $0<x<1$, $n=1,2,\cdots;$

(iii) 若 $n=2^k+n'$, $k\geqslant 0$, $0\leqslant n'\leqslant 2^k$, 则

$$nK_n(x)=2^kK_{2^k}(x)+n'D_{2^k}(x)+\varphi_k(x)n'K_{n'}(x);$$

(iv) $K_{2^k}(x)\geqslant 0,\quad k=0,1,2,\cdots;$

(v) 若 $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_s}(k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0)$。并令

$$n^{(1)}=n-2^{k_1},\quad n^{(\nu)}=n^{(\nu-1)}-2^{k_\nu}\quad (\nu=2,\ 3,\ \cdots,\ s),$$

$n^{(0)}=n$，则有分解公式

$$nK_n(x)=\sum_{\nu=1}^{s}2^{k_\nu}w_{n-n^{(\nu-1)}}(x)K_{2^{k_\nu}}(x)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s}n^{(\nu)}w_{n-n^{(\nu-1)}}(x)D_{2^{k_\nu}}(x);\quad (2.34)$$

(vi) $\int_0^1|K_n(x)|dx<2,\quad n=1,\ 2,\ \cdots;$

(vii) 对于 x 是非二进有理点，有

$$\lim_{n\to\infty}K_n(x)=0。$$

证 (i)与(ii)分别是引理 1 的(i)与(ii)的直接结果。

(iii) 设 $n=2^k+n'$，$0\leqslant n'\leqslant 2^k$，于是

$$nK_n(x)=\sum_{r=1}^{n}D_r(x)=\sum_{r=1}^{2k}D_r(x)+\sum_{l=1}^{n'}D_{2^k+l}(x).$$

因为

$$D_{2^k+l}(x)=D_{2^k}(x)+\sum_{\lambda=0}^{l-1}w_{2^k+\lambda}(x)$$

$$=D_{2^k}(x)+w_{2^k}(x)\sum_{\lambda=1}^{l-1}w_\lambda(x)$$

$$=D_{2^k}(x)+\varphi_k(x)D_l(x),$$

所以

$$nK_n(x)=2^kK_{2^k}(x)+\sum_{l=1}^{n'}\{D_{2^k}(x)+\varphi_k(x)D_e(x)\}$$

$$=2^kK_{2^k}(x)+n'D_{2^k}(x)+\varphi_k(x)n'K_{n'}(x)。$$

(iv) 对 $k=0$，$K_1(x)=D_1(x)=w_0(x)=1$。对 $k=1,2,\cdots$ 在 (iii) 中令 $n'=2^k$，有递推公式

$$K_{2^{k+1}}(x)=\frac{1+\varphi_k(x)}{2}K_{2^k}(x)+\frac{1}{2}D_{2^k}(x),$$

从而由 $1+\varphi_k(x)\geqslant 0$，$D_{2^k}(x)\geqslant 0$ 与 $K_1(x)=1$ 应用归纳法推知

$$K_{2^k}(x)\geqslant 0\quad (k=0,\ 1,\ \cdots)。$$

关于(v)，重复运用(iii)(共 s 次)便得分解公式(2.34)。

(vi) 由分解公式(2.34)与 $D_{2^{k_\nu}}(x)$，$K_{2^{k_\nu}}(x)$ 的非负性，有

$$\int_0^1 |K_n(x)|dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} \frac{2^{k_\nu}}{n}\int_0^1 K_{2^{k_\nu}}(x)\,|w_{n-n^{(\nu-1)}}(x)|\,dx$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s}\frac{n^{(\nu)}}{n}\int_0^1 D_{2^{k_\nu}}(x)\,|w_{n-n^{(\nu-1)}}(x)|\,dx$$

$$=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{2^{k_\nu}}{n}+\sum_{\nu=1}^{s}\frac{n^{(\nu)}}{n}=1+\sum_{\nu=1}^{s}\frac{n^{(\nu)}}{n}<2,$$

这是因为

$$n^{(1)}=n-2^{k_1}<2^{k_1},$$

$$n^{(\nu)}=n^{(\nu-1)}-2^{k_\nu}=(2^{k_\nu}+2^{k_\nu+1}+\cdots+2^{k_s})-2^{k_\nu}<2^{k_\nu}$$

$$(\nu=2,3,\cdots,s)。$$

从而(vi)证毕。

最后，关于(vii)。设 $0<x<1$ 是二进无理点，假定

$$2^{-k}<x<2^{-k+1}。\quad 令\ n=r2^k+s,\quad 0\leqslant s<2^k,$$

$$nK_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}D_\nu(x)。$$

若记 $\nu=r_1 2^k+s_1$，并注意到 $D_{2^k}(x)=0$，类似于引理1(ii)的证明，有

$$D_\nu(x)=D_{r_1 2^k+s_1}(x)=D_{2^k}(x)D_{r_1}(2^kx)+w_{r_1 2^k}(x)D_{s_1}(x)$$

$$=w_{r_1}(2^kx)D_{s_1}(x),$$

于是

$$nK_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}D_\nu(x)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{r-1}\sum_{s_1=1}^{2^k}w_{r_1}(2^kx)D_{s_1}(x)+\sum_{s_1=1}^{s}w_r(2^kx)D_{s_1}(x)$$

$$=2^kK_{2^k}(x)D_r(2^kx)+w_r(2^kx)sK_s(x)。$$

据(ii)，对一切 ν 有 $|K_\nu(x)|<2/x$；因 $1<2^kx<2$，由引理1(ii)有

$$|D_r(2^k x)| < \frac{2}{2^k x - 1},$$

还有 $$s < 2^k < 2/x。$$

因此便得 $nK_n(x)$ 的估计式

$$|nK_n(x)| < 2^k \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{2^{kx-1}} + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x(x-2^{-k})} + \frac{4}{x^2},$$

令 $n \to \infty$，则当 x 为二进无理点时，便可推得性质 vii)。引理全部证毕。

定理 2 设 $f(x)$ 是 $[0, 1)$ 上的连续函数，则在 $[0, 1]$ 上一致成立

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f; x) = f(x)。$$

证 由 (2.30) 与 (2.33) 易得 $\sigma_n(f; x)$ 的积分表示

$$\sigma_n(f; x) = \sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f; x)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f(x \oplus t) D_k(t)\, dt = \int_0^1 f(x \oplus t) K_n(t) dt。$$

从引理 2(i)，有

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_0^1 K_n(t)\{f(x \oplus t) - f(x)\}\, dt。$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上连续由于约定 $f(0) = f(1)$ 从而一致连续。这意味着，任意指定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，当 $|x \oplus t - x| \leqslant t < \delta$ 时，有

$$|f(x \oplus t) - f(x)| < \varepsilon/4。$$

于是

$$|\sigma_n(x) - f(x)|$$
$$\leqslant \left(\int_0^\delta + \int_\delta^1\right)|K_n(t)|\,|f(x \oplus t) - f(x)|\,dt \equiv I_1 + I_2。$$

关于 I_1。由引理 2(vi) 与 $f(x)$ 的连续性得

$$I_1=\int_0^\delta |K_n(t)|\,|f(x\oplus t)-f(x)|\,dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}\int_0^\delta |K_n(t)|\ dt<\frac{\varepsilon}{4}\int_0^1 |K_n(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

至于 I_2。令 $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$。由引理 2(ii)，(vii)分别有

$$|K_n(x)|<2/x<2/\delta,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x)=0。\quad (a.e.)$$

因而由 Lebesgue 控制收敛定理推得，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\int_\delta^1 |K_n(t)|\ dt<\varepsilon/4M.$$

于是，当 $n>N$ 时，

$$I_2=\int_\delta^1 |K_n(t)|\,|f(x\oplus t)-f(x)|dt<2M\int_\delta^1 |K_n(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2},$$

从 I_1 与 I_2 的估计式，最后有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant I_1+I_2<\varepsilon\quad (n>N)。$$

定理 2 证毕。

与一致逼近不同，对空间 $L^q_{[0,1]}$ $(q>1)$ 中的任一函数 $f(x)$，它的 W 级数部分和序列 $\{S_n(f;x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$。换句话说，$\{S_n(f;x)\}$ 能作为 $L^q_{[0,1]}$ 中任一元的平均逼近序列。

在建立平均逼近定理之前，先引入两个概念。

设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ $(a_n\neq 0)$ 为实(或复)数，形如

$$t_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu w_\nu(x)$$

的多项式 $t_n(x)$ 称为 n 次 Walsh 多项式 (W 多项式)。类 T_n 表示所有次数不超过 n 的 W 多项式全体。

设 $f\in L^q_{[0,1]}$，t_n 为 T_n 中的元，称数

$$E_n(f)=\inf_{t_n\in T_n}\|f-t_n\|_q$$

是 f 用 n 次 W 多项式在 $L^q_{[0,1]}$ 空间中的**最佳逼近**。容易证明

$$E_0(f)\geqslant E_1(f)\geqslant\cdots\geqslant E_n(f)\geqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f)=0。$$

如果存在多项式 $t_n^*(x)\in T_n$，使得

$$E_n(f)=\|f-t_n^*\|_q=\inf_{t_n\in T_n}\|f-t_n\|_q,$$

则称 $t_n^*(x)$ 为 f 的 **W 最佳逼近多项式。** 同样可以证明，对每个 $f\in L^q_{[0,1]}$，在类 T_n 中存在 f 的最佳逼近多项式 $t_n^*(x)$（也可参阅 [22]，[23]）。

关于平均逼近，有如下

定理 3 设 $f\in L^q_{[0,1)}$ $(1<q<+\infty)$，则 f 的 W 展式的部分和序列 $\{S_n(f;x)\}$ 是 $f(x)$ 的平均逼近序列，即

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-f\|_q=0\quad(1<q<\infty)。$$

特别，对 $q=2$，**Parseval 公式**

$$\int_0^1|f(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \tag{2.35}$$

成立，其中 c_n 是 f 的 W 系数。

证 对 $q=2$ 的情形，由于 W 系是区间 $[0,1)$ 上的完整标准直交系，据第一章 §2 的定理 2，对每个 $f\in L^2_{[0,1)}$，(2.35) 成立。另外，对 W 系 $\{w_n(x)\}$ 而言，完全类似于第一章 §2 中的推导，有（参看 (1.19) 式）

$$\begin{aligned}\|S_n-f\|_2^2&=\int_0^1|S_n(x)-f(x)|^2dx\\&=\int_0^1|f(x)|^2dx-\sum_{\nu=0}^{n-1}|c_\nu|^2。\end{aligned}$$

利用 (2.35)，可推得

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-f\|_2=0。$$

对于一般的 q $(1<q<\infty)$，R. E. A. C. Paley ([15]，定理IV，p.225) 首先建立了 q 幂可积函数 $f(x)$ 的 W 展式部分和 $S_n(x)$ 在 $L^q_{[0,1)}$ 中的范数估计式

$$\|S_n\|_q\leqslant M_q\|f\|_q\quad(1<q<\infty),$$

其中 M_q 为仅与 q 有关的一个常数。利用这个不等式，不难推出本定理结论成立。事实上，设 $t_n^*(x)$ 是 f 的 W 最佳逼近多项式，$t_n^*\in T_n$。

据习题2.16，$t_n^*(x)$ 的 W 级数的第 n 部分和为其自身，即

$$t_n^*(x)=S_n(t_n^*;\ x),$$

而

$$S_n(f;\ x)-S_n(t_n^*;\ x)=S_n(f-t_n^*;\ x),$$

据 Paley 的不等式，有

$$\|S_n(f-t_n^*;\circ)\|_q\leqslant A_q\|f-t_n^*\|_q\quad(q>1),$$

其中 A_q 为仅与 q 有关的常数。

因此，由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\|S_n-f\|_q&=\|S_n(f;\ \circ)-f(\circ)\|_q\\&\leqslant\|S_n(f;\circ)-t_n^*(\circ)\|_q+\|t_n^*-f\|_q\\&=\|S_n(f-t_n;\ \circ)\|_q+\|t_n^*-f\|_q\\&\leqslant A_q\|f-t_n^*\|_q+\|f-t_n^*\|_q=(1+A_q)E_n(f)\\&=o(1)\quad(n\to\infty)。\end{aligned}$$

定理3证毕。

关于逼近定理进一步的讨论可参阅[32]中的介绍及所列出的有关文献。

作为本节的结束，举一实例说明一致逼近与平均逼近的

误差估计。

考察函数 $f(x)=x\ (0\leqslant x<1)$ 的 W 展式(本章 §4 的例 3),

$$x=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(n+1)}wal_{2^n-1}(x)$$

注意到

$$wal_{2^n-1}(x)=w_{2^n-1}(x),$$

展式可改写为

$$x=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-(n+2)}w_{2^n}(x),$$

对照 (2.20) 的级数, W 系数 $c_\nu\ (\nu=0,1,\cdots)$ 为

$$c_\nu=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \nu=0,\\ -2^{(n+2)}, & \nu=2^n,\ n=0,1,\cdots,\\ 0, & \text{其他的 }\nu,\end{cases}$$

这是一个缺项 W 级数。

以 $S_k(x)$ 表示函数 x 的 W 级数的第 k 部分和,

$$S_k(x)=\sum_{\nu=0}^{k-1}c_\nu w_\nu(x),$$

据定理 1 的证明可知, $S_k(x)$ 在 $[0,1-\eta]$ 上一致收敛于 $x\ (0<\eta<1)$;又据定理 3, $S_k(x)$ 在 $[0,1)$ 上是(平方)平均收敛于 x。下面分别估计用 $S_k(x)$ 一致逼近 x 与平均逼近 x 的误差。

关于一致逼近。令 $k-1=2^n+k'\ (0\leqslant k'<k-1)$, 于是对 $0\leqslant x<1$,

$$x-S_k(x)=-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}2^{-(\nu+2)}w_{2^\nu}(x),$$

$$|x-S_k(x)|\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{\infty}2^{-(\nu+2)}=\frac{1}{4}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}2^{-\nu}$$

$$=2^{-(n+2)}=\frac{1}{2}2^{-(n+1)}。$$

从而，范数估计式为

$$\|x-S_k\|_c \equiv \sup_{x\in[0,1-\eta]} |x-S_k(x)| \leqslant 2^{-(n+2)},$$

其中 $n=[\log_2(k-1)]$。

关于平均逼近。先验证函数 $f(x)=x$ 满足 Parseval 公式。事实上，一方面有

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

另一方面

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = c_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2^n}|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{3},$$

从而

$$\int_0^1 x^2 dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 。$$

其次，有误差估计

$$\|x-S_k\|_2 = \left(\int_0^1 x^2 dx - \sum_{\nu=0}^{k-1} |c_\nu|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{\nu=k}^{\infty} |c_\nu|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{\lambda=n+1}^{\infty} 2^{-2(\lambda+2)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} 2^{-(n+1)},$$

其中 $n=[\log_2(k-1)]$。

由此可见，对函数 $f(x)=x$ 来说，同样用它的 W 展式部分和 $S_k(x)$ 作逼近序列，在不同的逼近意义下，可得

$$\|x-S_k\|_c \leqslant \frac{1}{2} 2^{-(n+1)},$$

$$\|x-S_k\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} 2^{-(n+1)} 。$$

例如，取 $\varepsilon=10^{-3}$，欲使 $\|x-S_k\|_c<\varepsilon$，只要取 $n=8$；欲使

$$\|x-S_k\|_2<\varepsilon,$$

则取 $n=9$。就是说，只要分别取函数 x 的 W 展式的前 8 项之和与前 9 项之和作为函数 x 的近似，就能达到预先指定的误差（$\varepsilon=10^{-3}$）。

从上述实例可见，对于函数 $f(x)=x$ 来说，用 W 多项式 $S_k(x)$ 作逼近，在 c 空间与 L^2 空间是同阶的。不过，在数值计算中，采用何种求和法是一个值得研究的问题。

§6 Walsh 函数的其他定义

这一节介绍 W 函数的其他一些定义。包括由差分方程确定的递推关系，借用二进制数表示以及由伪乘运算的表示。W 函数还有一些表示法（例如向量表示）将在第三章中叙述。

1. 递推表示法

设基本区间为 [0, 1)。在这里总是约定凡变量 u 超出基本区间之外，一切函数值 $wal_k(u)$ 均算作零。定义在 [0,1) 上的全体 W 函数由下述递推关系式而得

$$wal_0(x)=1,$$

$$wal_k(x)=wal_{\left[\frac{k}{2}\right]}(2x)+(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}wal_{\left[\frac{k}{2}\right]}(2x-1),\quad k=1,2,\cdots。\qquad(2.36)$$

它可变形为等价的形式

$$wal_{2k}(x)=wal_k(2x)+(-1)^k wal_k(2x-1),\qquad(2.37)$$

$$k=0,1,2,\cdots。$$

$$wal_{2k+1}(x)=wal_k(2x)+(-1)^{k+1}wal_k(2x-1)。\qquad(2.38)$$

由差分方程（2.36）所表示的函数实际上与本章 §2 所定义的 W 函数（$0\leqslant x<1$）是一致的。为此，只须验证先前定义的 W 函数同时满足关系式（2.37）与（2.38）。先看（2.37）。

当 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时，$2x<1$，$2x-1\,\overline{\in}[0,1)$，于是由习题 2.9 与本节开始时的约定，同时有

$$wal_k(2x)=wal_{2k}(x) \text{ 与 } (-1)^k wal_k(2x-1)=0;$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，同理可得

$$wal_k(2x)=0$$

与

$$\begin{aligned}(-1)^k wal_k(2x-1)&=wal_k(1-(2x-1))=wal_k(2(1-x))\\&=wal_{2k}(1-x)=wal_{2k}(x),\end{aligned}$$

由此得出当 $0\leqslant x<1$ 时，函数

$$wal_k(2x)+(-1)^k wal_k(2x-1)$$

与 $wal_{2k}(x)$ 相一致，从而 (2.37) 式成立。再看 (2.38) 式。因为

$$wal_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\end{cases}$$

于是由

$$wal_{2k+1}(x)=wal_{2k\oplus 1}(x)=wal_{2k}(x)wal_1(x),$$

与 (2.37) 一起推得 (2.38) 成立。

利用 (2.36) 式可以依次作出 W 函数的图形。由于 $wal_k(2x)$ 与 $wal_k(x)$ 的形状相同，只是前者在水平方向上被压缩到 $0\leqslant x<\frac{1}{2}$ 的范围内；而

$$wal_k(2x-1)=wal_k\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

与 $wal_{2k}(x)$ 相比，其图形向右移了 1/2。因此，给定了

$$wal_0(x)=1 \quad (0\leqslant x<1),$$

就可以按 (2.37) 与 (2.38) 依次作出所有函数的图形。例如，$wal_k(x)$ $(k=1, 2, 3)$ 由下列式子生成：

$$wal_1(x) = wal_0(2x) - wal_0(2x-1),$$
$$wal_2(x) = wal_1(2x) - wal_1(2x-1),$$
$$wal_3(x) = wal_1(2x) + wal_1(2x-1)。$$

图 2.5 (a) 表示由 $wal_0(x)$ 生成 $wal_1(x)$ 的过程，图 2.5 (b) 与 (c) 分别表示由 $wal_1(x)$ 生成 $wal_2(x)$，$wal_3(x)$ 的过程。

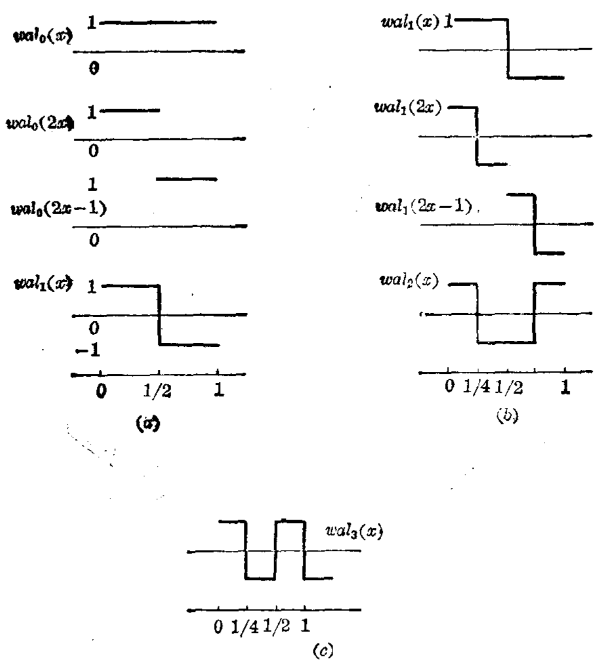


图 2.5

如果采用 W 函数的向量表示 (详见第三章 § 1)，利用差分方程 (2.37)，(2.38)，我们能从 $wal_k(x)$ 的值很方便地定出 $wal_{2k}(x)$ 与 $wal_{2k+1}(x)$ 的值。今举两例说明其方法。

例如，已知 $wal_4(x)$ 在每个区间 $\left[\frac{l}{8}, \frac{l+1}{8}\right)$ $(l=0, 1, \cdots, 7)$ 上取值依次为 1, −1, −1, 1, 1, −1, −1, 1（参看图2.2）。把它表示成长度为 8 的向量

$$wal_4(x)=(1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1)。$$

$wal_4(2x)$ 表示把 $wal_4(x)$ 水平方向压缩到 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$内，在$\left[\frac{1}{2}, 1\right)$内取值为 0，再把 $wal_4(2x)$ 右移 $\frac{1}{2}$，便得 $wal_4(2x-1)$，于是 $wal_4(2x-1)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 取值为 0。如果把 $wal_4(2x)$ 与 $wal_4(2x-1)$ 都表示成长度为 16 的向量，每个分量依次表示函数在区间 $\left[\frac{l}{16}, \frac{l+1}{16}\right)$ $(l=0, 1, \cdots, 15)$ 上的取值，则有

$$wal_4(2x)=(1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0),$$

$$wal_4(2x-1)=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1)。$$

利用 (2.37)，对应分量相加（因 $k=4$ 为偶数）得

$$wal_8(x)=(1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1)。$$

利用 (2.38)，便得

$$wal_9(x)=(1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1)。$$

又如，由 $wal_5(x)$ 的值

$$wal_5(x)=(1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1),$$

利用 (2.38) 定得（此时 $k=5$ 为奇数）$wal_{11}(x)$ 为

$$wal_{11}(x)=(1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1)。$$

我们把用递推关系式求 W 函数的方法列为下述。

已知 $wal_k(x)$，求 $wal_{2k}(x)$ 与 $wal_{2k+1}(x)$：

(1) 把 $wal_k(x)$ 写为 2^n 维向量形式 $(0\leqslant k\leqslant 2^n-1)$，

$$wal_k(x)=(w_{k0}\ w_{k1}\ \cdots\ w_{k,2^n-1});$$

(2) 分别作 2^{n+1} 维的向量，

$$(w_{k0}\ w_{k1}\ \cdots\ w_{k,2^n-1}\ 0\ 0\cdots 0),$$
$$(0\ 0\cdots 0\ w_{k0}\ w_{k1}\ \cdots\ w_{k,2^n-1});$$

(3) 当 k 为偶数：(2) 的分量相加得 $wal_{2k}(x)$，相减得 $wal_{2k+1}(x)$；

当 k 为奇数：相加得 $wal_{2k+1}(x)$，相减得 $wal_{2k}(x)$。

2. 用二进制数表示 W 函数

设 $k=\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}k_{-\nu}2^{\nu}$, $k_{-n}=0$, $x=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}x_{\nu}2^{-\nu}$, 诸$k_{-\nu}, x_{\nu}\in\{0,1\}$。于是 W 系的每个列率序 W 函数可规定为

$$wal_k(x)=(-1)^{\sum\limits_{\nu=0}^{N-2}(k_{-\nu}\oplus k_{-(\nu+1)})X_{\nu+1}}。\tag{2.39}$$

用 k 与 x 的二进表示的函数 $wal_k(x)$ (2.39) 实际上就是本章 §2 中所定义的列率序的 W 函数的另一种表示式。事实上，由习题 2.4，知

$$wal_k(x)=\prod_{\nu=0}^{N-1}(\varphi_{\nu}(x))^{k'_{-\nu}},$$

其中 $k'_{-\nu}=k_{-\nu}\oplus k_{-(\nu+1)}$，又据 R 函数的二进表示 (2.4) 式

$$\varphi_{\nu}(x)=(-1)^{x_{\nu+1}},$$

得

$$wal_k(x)=\prod_{\nu=0}^{N-1}(-1)^{x_{\nu+1}k'_{-\nu}}=(-1)^{\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}(k_{-\nu}\oplus k_{-(\nu+1)})X_{\nu+1}},$$

即先前定义的 W 函数满足 (2.39) 式。

关于自然序的 W 系 $\{w_n(x)\}$ 的每个函数同样也可以用 n 与 x 的二进表示。设

$$n=\sum_{\nu=0}^{N-1}n_{-\nu}2^{\nu},\quad X=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_{\nu}2^{-\nu},$$

其中 $n_{-\nu}, x_{\nu}\in\{0,1\}$，则

$$w_n(x)=(-1)^{\sum\limits_{\nu=0}^{N-1}n_{-\nu}x_{\nu+1}}\tag{2.40}$$

（习题 2.18）。

可以用 (2.39) 或 (2.40) 绘制 W 函数的图形。以后在讨论有限 W 变换与引进 p 进 W 函数以及广义 W 函数时将显出 (2.40) 的优点。

3．用伪乘运算表示 W 函数

设 $n=\sum_{\nu=0}^{s-1}n_{-\nu}2^{\nu}$，$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_{\nu}2^{-\nu}$，诸 $n_{-\nu}$，$x_{\nu}\in\{0, 1\}$。规定非负整数 n 与小数 $x(0\leqslant x<1)$ 的**伪乘运算** $\odot$ 为

$$n\odot x=\bigoplus_{\nu=0}^{s-1}n_{-\nu}x_{\nu+1},\tag{2.41}$$

其中求和号 $\bigoplus$ 表示连伪加

W 函数可以用伪乘运算表示成简洁的形式

$$w_n(x)=(-1)^{n\odot x}。\tag{2.42}$$

这是因为

$$(-1)^{\sum_{\nu=0}^{s-1}n_{-\nu}x_{\nu+1}}=(-1)^{\bigoplus_{\nu=0}^{s-1}n_{-\nu}x_{\nu+1}}。$$

利用 $w_n(x)$ 的伪乘表示 (2.42)，可以方便地引入 p 进W 函数或广义 W 函数(后者详见第六章 §1)。

设 $p\geqslant2$ 为正整数。数 $x\in[0, 1)$与非负整数 n 表示为 p 进制数

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_{\nu}p^{-\nu},\quad x_{\nu}\in\{0, 1, \cdots, p-1\},$$

$$n=\sum_{\nu=0}^{s-1}n_{-\nu}p^{\nu},\quad n_{-\nu}\in\{0, 1, \cdots, p-1\}。$$

数 n 与 x 的伪乘 $n\odot x$ 仍由(2.41)定义，不过这时 $n_{-\nu}$ 与 x_{ν} 都是 p 进代码，而 $\bigoplus$ 表示对 (2.41) 的和取模 p 计算（在 $p=2$ 情形即为连伪加)。

对 $0\leqslant x<1$，我们定义 **p 进 W 函数**为

$$w_n(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} n \odot x\right), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.43}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$。

显然，$p = 2$ 时 (2.43) 即为 (2.42)。

特别要注意的是，当 $p > 2$ 时，p 进 W 函数不再是取二个值的实函数，而是取 p 个值的复值函数。若令

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right),$$

则当 $x \in [0, 1)$ 时，$w_n(x)$ 分别取 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{p-1}$ 共 p 个值。

例 对 $p = 3$，求三进 W 函数 $w_5(x)$ $(0 \leqslant x < 1)$。

【解】 令

$$n = \sum_{\nu=0}^{s-1} n_{-\nu} 3^{\nu}, \quad x = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu 3^{-\nu}。$$

对于 $n = 5$，有 $n_{-1} = 1$，$n_0 = 2$，于是

$$5 \odot x = \sum_{\nu=0}^{1} n_{-\nu} X_{\nu+1} = 2x_1 + x_2 \pmod 3,$$

因此，

$$w_5(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}(5 \odot x)\right) = \omega^{5\odot x} = \omega^{2X_1 + X_2}。$$

这里

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right),$$

根据 $0 \leqslant x < 1$ 的 3 进表示，不难求出 $w_5(x)$ 在每段小区间

$$I_l: \left[\frac{l}{9}, \frac{l+1}{9}\right) \quad (l = 0, 1, \cdots, 8)$$

上的值。把它们列在表 2.4 中。

对于 $p = 3$，三进 W 系 $\{w_n(x)\}(p = 3)$ 的首 9 个函数的值列在表 2.5 中。

表 2.4

I_ν	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
$x\in I_\nu$ 的三进制表示 $x=(0_3x_1x_2\cdots)$	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1=0$ $x_2=1$	$x_1=0$ $x_2=2$	$x_1=1$ $x_2=0$	$x_1=1$ $x_2=1$	$x_1=1$ $x_2=2$	$x_1=2$ $x_2=0$	$x_1=2$ $x_1=1$	$x_1=2$ $x_2=2$
$2x_1+x_2(\text{mod}3)$	0	1	2	2	0	1	1	2	0
$w_5((x)$	1	ω	ω^2	ω^2	1	ω	ω	ω^2	1

表 2.5

$$\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\quad I_\nu=\left\{x\,\middle|\,\frac{\nu}{9}\leqslant x<\frac{\nu+1}{9}\right\}$$

$w_n(x)$ \ I_ν	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
$w_0(x)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$w_1(x)$	1	1	1	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
$w_2(x)$	1	1	1	ω^2	ω^2	ω^2	ω	ω	ω
$w_3(x)$	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
$w_4(x)$	1	ω	ω^2	ω	ω^2	1	ω^2	1	ω
$w_5(x)$	1	ω	ω^2	ω^2	1	ω	ω	ω^2	1
$w_6(x)$	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω
$w_7(x)$	1	ω^2	ω	ω	1	ω^2	ω^2	ω	1
$w_8(x)$	1	ω^2	ω	ω^2	ω	1	ω	1	ω^2

p 进 W 系 $\{w_n(x)\}(n=0, 1, \cdots)$ 也是区间 $[0, 1)$ 上的完整标准直交系，并且具有类似于本章 § 3 中所述二进 W 系 $\{w_n(x)\}$ 的基本性质。例如，关于乘法公式，有

(i) $w_{n\oplus m}(x)=w_n(x)w_m(x)$,

(ii) $w_n(x)w_n(y)=w_n(x\oplus y)$,

(iii) $w_n(x)\overline{w_n(y)}=w_n(x\ominus y)$,

(ii)、(iii)中至多除去 $x\oplus y, x\ominus y$ 为 (p 进) 有理数以外恒成立。另外，本章 § 4—5 的一些性质与定理也可推广到 p 进情形，这里不一一详述了，有兴趣的读者除参阅第六章 § 1 外，还可参看 [7] 与 [19]。

最后，利用第一章 § 3 的 p 进群概念，类似于本章 § 3 末尾（关于 $p=2$ 情形）的讨论，可以把区间 $[0, 1)$ 上的 p 进 W 函数 $w_n(x)$ 与 p 进群 G 上的某个特征相对应，反之亦然。也就是说，$[0, 1)$ 上的 p 进 W 系 $\{w_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 等同于 p 进群 G 的特征群。

§ 7 二元 Walsh 函数

通迅中的信号往往是几个自变量的函数。例如，黑白电视信号涉及两个空间变量与一个时间变量。因此很有必要引进多元 W 函数。多元 W 函数可由一元情形加以拓广而得，仅需在记号上作某些改变。

考虑基本区域为正方形 $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$。如果从列率序 W 系 $\{wal_k(x)\}$ 出发，那么定义在基本区域上的二元 W 系就是 $\{wal_k(x)wal_j(y)\}$ $(k, j=0, 1, \cdots)$。固定的一组 k, j 对应于一个二元 W 函数 $wal_k(x)wal_j(y)$。类似地，定义在单位立方体 $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$, $0\leqslant z<1$ 上的三元 W 系是

$$\{wal_k(x)wal_j(y)wal_l(z)\} \quad (k,\ j,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)。$$

更多元的 W 函数照此类推。

当然，如果从自然序 W 系 $\{w_n(x)\}$ 出发，相应地可定义基本区域上的二元 W 系为

$$\{w_n(x)w_m(y)\} \quad (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)。$$

与一元情形一样，$\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 与 $\{w_n(x)\ w_m(y)\}$ 是同一个函数系的两种不同排序而已。在工程上常常采用前者，本节就二元 W 系 $\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 来讨论。

由于 $wal_k(x)$ 与 $wal_j(x)$ 都是以 1 为周期的函数，所以二元函数 $wal_k(x)\ wal_j(y)$ 也能延拓到整个二维平面上，使在整个平面上是两个变量 x、y 的周期函数，且周期都是 1。

二元 W 系 $\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 可以排成一个无穷阵列，前面 n^2 个函数是

$$\begin{array}{llll} wal_0(x)\ wal_0(y) & wal_0(x)wal_1(y) & \cdots & wal_0(x)wal_{n-1}(y) \\ wal_1(x)\ wal_0(y) & wal_1(x)wal_1(y) & \cdots & wal_1(x)wal_{n-1}(y) \\ \cdots\cdots & & & \\ wal_{n-1}(x)\ wal_0(y) & wal_{n-1}(x)\ wal_1(y) & \cdots & wal_{n-1}(x)wal_{n-1}(y) \end{array}$$

其前面 16 个函数 $wal_k(x)\ wal_j(y)$ $(0\leqslant k,\ j\leqslant 3)$ 的图形如图 2.6 所示。图中阴影区域表示函数于所在的区域取值为 1 而白色区域表示函数取值 -1。

对 $k=j=0$，$wal_0(x)\ wal_0(y)=1$ $(0\leqslant x,\ y<1)$，所以它在整个基本区域上的积分等于 1，二元 W 系的其他函数既取值 1 又取值 -1，不过在整个区域上的积分总等于零。即

$$\int_0^1\int_0^1 wal_k(x)wal_j(y)dxdy=\begin{cases}1,\ k=j=0,\\ 0,\ 其他情形,\end{cases} \quad k,\ j=0,\ 1,\ \cdots。$$

这个事实反映在图形上，$wal_0(x)wal_0(y)$ 在整个基本区域上表示为阴影状，而其他的 W 函数，既有阴影部分，又有白色部

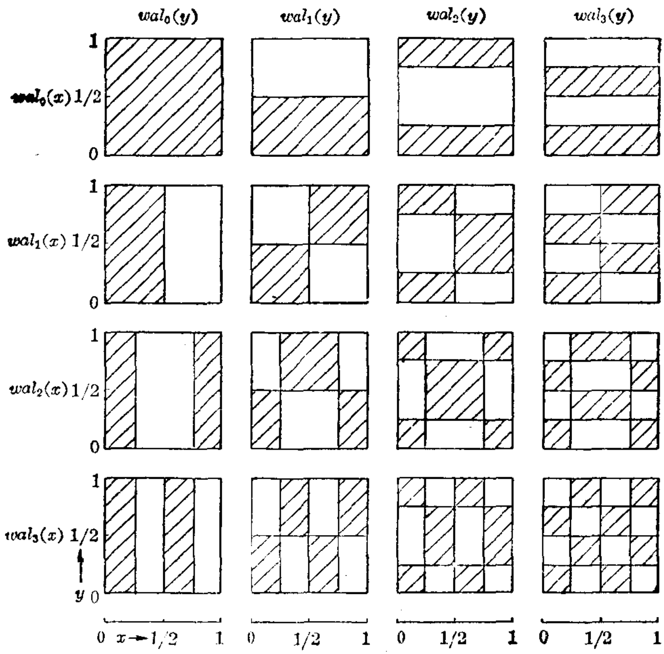


图 2.6

分，且两者所占的面积相等。

由于每个二元 W 函数 $wal_k(x)\ wal_j(y)$ 实际上是两个具有独立变量的一元函数 $wal_k(x)$ 与 $wal_j(y)$ 的乘积，所以二元 W 函数的一些性质可完全仿照一元情形而推得。特别，读者可自行证明二元 W 系 $\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 是基本区域上的完整标准直交系(直交性与完整性的定义类似于一元情形，只要把一元函数改为二元函数，单积分相应改为重积分，等等)。利用这个特点，我们也可考虑二元函数 $f(x, y)$ 按 W 系 $\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 的展开。

设 $f(x, y)$ 在整个平面上是两个变量 x, y 的周期函数

(周期为 1)，且在基本区域上可积。于是可以把 $f(x,y)$ 按W系 $\{wal_k(x)\ wal_j(y)\}$ 作形式上的展开

$$f(x,y)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{kj}wal_k(x)\ wal_j(y),\qquad(2.44)$$

其中系数 a_{kj} 由

$$a_{kj}=\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)wal_k(x)\ wal_j(y)\ dx\,dy\qquad(2.45)$$

$$k,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

确定。我们称 (2.44) 中的级数为 $f(x,\ y)$ 的**二元 W 级数**，由(2.45)表示的系数 a_{kj} 称为 $f(x,\ y)$ 的**二元 W 系数**，首项 $a_{00}\ wal_0(x)\ wal_0(y)$ 称为 $f(x,\ y)$ 的**平均值**。

多重 W 级数的收敛性等问题比较复杂，这就给多元W分析带来一系列的课题。这里不一一详述了。

设 $S_n(f;\ x,\ y)=S_n(x,\ y)$ 表示级数 (2.44) 前面 n^2 项之和

$$S_n(x,\ y)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}wal_k(x)\ wal_j(y).$$

类似于一元情形，我们有

(i) 若 $f(x,\ y)$ 是基本区域 $0\leqslant x,\ y<1$ 上的可积函数，则除一个二维零测度点集以外，有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2^n}(x,\ y)=f(x,\ y),\qquad(2.46)$$

特别，关系式 (2.46) 对 $f(x,\ y)$ 的连续点成立。

(ii) $a_{kj}\to 0\ (k,\ j\to\infty)$，即

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}}\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)wal_k(x)\ wal_j(y)\ dx\,dy=0。$$

(iii) 若 $f(x,\ y)$ 还是基本区域上的平方可积函数，则 Parseval 公式成立

$$\int_0^1\int_0^1|f(x,\ y)|^2dx\,dy=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{kj}|^2。\qquad(2.47)$$

公式 (2.47) 也称为二元信号 $f(x,y)$ 的能量守恒公式。

在实际应用中，所考察的二元函数 $f(x, y)$ 可以代表黑白相片，汉字，图象或二维信号等等。若仅考虑黑白两色，那么每个函数 $f(x, y)$ 就是一个取值 1 或 -1 的二值函数。尽管人眼对黑白反差的辨认是很敏感的，但列率高于 15 的谐波对视觉已不发生影响。通常，可以把基本区域等分成 $N^2(N=2^n)$ 个小格，而每个小格代表 $f(x, y)$ 的一个"点"，即函数在每个小方格上取常数值。因为每个 $wal_k(x)(0\leqslant k\leqslant 2^n-1)$ 在区间 $\nu/2^n\leqslant x<(\nu+1)/2^n(\nu=0, 1, \cdots, 2^n-1)$ 上取常数值(参看习题 2.7)，所以每个二元 W 函数 $wal_k(x)\ wal_j(y)\ (0\leqslant k,\ j\leqslant 2^n-1)$ 在每个小正方形(共 $(2^n)^2=2^{2n}$ 个)

$$I_{\nu\mu}: \nu/2^n\leqslant x<(\nu+1)/2^n,\quad \mu/2^n\leqslant y<(\mu+1)/2^n,$$
$$\nu,\ \mu=0,\ 1,\ \cdots$$

上也分别取常数值。注意到 $f(x, y)$ 在第 (ν, μ) 个小正方形(即"点")上取常数值 $f_{\nu\mu}$，于是

$$\begin{aligned}a_{kj}&=\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y)\ wal_k(x)\ wal_j(y)\ dx\,dy\\&=\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\sum_{\mu=0}^{2^n-1}\int_{\nu/2^n}^{(\nu+1)/2^n}\int_{\mu/2^n}^{(\mu+1)/2^n} f_{\nu\mu}\ wal_k(x)\ wal_j(y)\ dx\,dy\\&=\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\sum_{\mu=0}^{2^n-1} f_{\nu\mu}\int_{\nu/2^n}^{(\nu+1)/2^n} wal_k(x)\,dx\int_{\mu/2^n}^{(\mu+1)/2^n} wal_j(y)dy。\end{aligned}$$

但是，对 $k, j\geqslant 2^n$ 时，上述和式中的每个积分为零（习题 2.10 (ii)），所以有

$$a_{kj}=0\quad (k, j\geqslant 2^n)。$$

因此，如果 $f(x, y)$ 在小正方形

$$\nu/2^n\leqslant x<(\nu+1)/2^n,\ \mu/2^n\leqslant y<(\mu+1)/2^n,$$
$$\nu、\mu=0, 1,\ \cdots,\ 2^n$$

上取常数值 $f_{\nu\mu}$，那么 $f(x, y)$ 可以表示成 W 系

$$\{wal_k(x)wal_j(y)\}$$

中前面 $(2^n)^2$ 个函数的线性组合

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1}a_{kj}\,wal_k(x)\,wal_j(y), \qquad (2.48)$$

其中

$$a_{kj}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\sum_{\mu=0}^{2^n-1}f_{\nu\mu}w_{k\nu}w_{j\mu}, \qquad (2.49)$$

这里 $w_{k\nu}, w_{j\mu}$ 分别表示 $wal_k(x)$ 在 $[\nu/2^n, (\nu+1)/2^n)$，$wal_j(y)$ 在 $[\mu/2^n, (\mu+1)/2^n)$ 上的值，从而乘积 $w_{k\nu}w_{j\mu}$ 表示函数 $wal_k(x)\ wal_j(y)$ 在小正方形 $I_{\nu\mu}$ 上的值。

利用 (2.48) 与 (2.49)，我们就可以来回答引言中提出的关于汉字“工”的表示问题了。

设 $f(x,y)$ 是一个汉字“工”(见引言中的图)。把基本区域分成 $(2^3)^2=64$ 小格(相当于 $n=3$ 情形)。我们的 $f(x,y)$ 在每小格上取值 1 (以黑色表示)或取 -1 (以白色表示)使得在整个基本区域上呈现一“工”字。据 (2.48)，$f(x,y)$ 有表示式

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}a_{kj}\,wal_k(x)\,wal_j(y),$$

其中系数 a_{kj} 由 (2.49) 确定

$$a_{kj}=\frac{1}{64}\sum_{\nu=0}^{7}\sum_{\mu=0}^{7}f_{\nu\mu}\,w_{k\nu}\,w_{j\mu},$$

$$0\leqslant k,\quad j\leqslant 7。$$

虽然 $f(x,y)$ 的表示式中共有 64 项，从而要计算 64 个系数。不过稍经观察，据函数图形的对称性便知，当序号 k,j 中之一为奇数时，$a_{kj}=0$。这样实际上只需计算 k,j 都是偶数的情形，这时还剩下 16 个系数

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{02} & a_{04} & a_{06} \\ a_{20} & a_{22} & a_{24} & a_{26} \\ a_{40} & a_{42} & a_{44} & a_{46} \\ a_{60} & a_{62} & a_{64} & a_{66} \end{matrix}$$

经计算，上述阵列右半边 8 个系数全为零，左半边 8 个的值是

$$a_{00}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\ a_{02}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4},\ a_{20}=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4},$$

$$a_{22}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\ a_{40}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\ a_{42}=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4},$$

$$a_{60}=-\frac{16}{64}=-\frac{1}{4},\ a_{62}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}。$$

从而

$$\begin{aligned} f(x,y)=\frac{1}{4}\Big(&wal_0(x)\ wal_0(y)+3wal_0(x)\ wal_2(y)\\ &-wal_2(x)\ wal_0(y)+wal_2(x)\ wal_2(y)\\ &+wal_4(x)\ wal_0(y)-wal_4(x)\ wal_2(y)\\ &-wal_6(x)\ wal_0(y)+wal_6(x)\ wal_2(y)\Big)。\end{aligned}$$

上述和式中每个二元 W 函数的图形正好依次是引言中函数 $u_l(x, y)$ 的图形 $(l=1, 2, \cdots, 8)$。

计算结果经检验的确满足 Parseval 公式 (2.47)。借此可帮助检查计算的正确性。

习　题

1. 试将下列 W 函数表示为 R 函数的乘积

$$w_{10}(x),\ w_{105}(x),\ wal_{10}(x),\ wal_{105}(x).$$

2. 把题 1 中的函数表示为 L 函数的乘积。
3. 试作 $wal_8(x)$, $wal_{10}(x)$ 的图形。
4. 设 $k=(k_{-(N-1)}\ k_{-(N-2)}\cdots k_0)$, $k_{-j}\in\{0, 1\}$,

$$G(k)=(k'_{-(N-1)}\ k'_{-(N-2)}\cdots k'_0)$$

是 k 的 Gray 码。求证

(i) $wal_k(x)=\prod_{j=0}^{N-1}[\varphi_j(x)]^{k_j'}$

(ii) $wal_k(x)=\prod_{j=0}^{N-1}[\psi_j(x)]^{k_j'}$;

其中 $\varphi_j(x)$ 与 $\psi_j(x)$ 分别是 R 函数与 L 函数。

5．试证关系式(2.10)，(2.11)与(2.13)。

6．试证由(2.9)定义的 L 函数系 $\{\psi_n(x)\}$ $(n=0, 1\cdots)$ 是 $[0, 1)$ 上的标准直交系。

7．试证 $wal_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, 2^n-1)$ 在每个区间

$$\left[\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right) \quad (\nu=0, 1, \cdots, 2^n-1)$$

取常数值 $w_{k\nu}$，$|w_{k\nu}|=1$。

8．试证 $\{w_n(x)\}$ 有下述公式成立：对 $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$,

(i) $\int_0^1 w_n(x)w_m(x)dx=\begin{cases}1, & 若 m=n,\\ 0, & 若 m\neq n;\end{cases}$

(ii) $w_m(x)w_n(x)=w_{m\oplus n}(x)$;

(iii) $w_n(x)w_n(y)=w_n(x\oplus y)$, a. e., $n=0, 1, \cdots$;

(iv) 在(ii)之下，$\{w_n(x)\}$ 构成一可换群。

9．试证等式

(i) $wal_k(1-x)=(-1)^k wal_k(x)$ （$|x|\leqslant 1$ 除有限个点外）；

(ii) $wal_k(2^s x)=wal_{2^s k}(x)$ （$0\leqslant x<2^{-s}$, s 为正整数）。

10 试证

(1) $\int_0^{2^{-N}}\varphi_n(x)dx=0$,

(ii) $\int_0^{2^{-N}} wal_k(x)dx=0$ $(k, n>2^N, N=0, 1, \cdots)$。

11．计算

$$\int_0^1 wal_8(x)w_n(x)dx, \quad n=0, 1, \cdots。$$

12．设 $n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s}$ $(n_1>n_2>\cdots>n_s\geqslant 0)$ $D_n(x)$ 为 Dirichlet 核(2.25)，求证

$$D_n(x)=w_n(x)\sum_{\nu=1}^{s}\varphi_{n_\nu}(x)D_{2^{n_\nu}}(x)。$$

（提示：利用数学归纳法。先验证结论对 $n=1$ 成立，然后假设对一切 $n\leqslant 2^k$ 结论成立，再去证明对 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$ 结论成立。并注意关系式：对 $\lambda<k$，有 $\varphi_\lambda(x)D_{2^k}(x)=D_{2^k}(x)$。）

13．证明等式

$$\sum_{r=0}^{2^n+1} w_{2^n+r}(x)=\begin{cases}2^n\varphi_n(x), & 0\leqslant x<2^{-n};\\ 0, & 2^{-n}\leqslant x<1。\end{cases}$$

14．试把下述 $f(x)$，$g(x)$ 展成 W 级数

x	$\left[0,\frac{1}{8}\right)$	$\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$	$\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$	$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$	$\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)$	$\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right)$	$\left[\frac{7}{8},1\right)$
$f(x)$	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
$g(x)$	1	-1	1	1	1	1	-1	1

15．试求

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若\ 0\leqslant x<1/2,\\ 1-x, & 若\ 1/2\leqslant x<1\end{cases}$$

的 W 展式。

16．设 $f(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}c_\nu w_\nu(x)$ 为任意的 n 阶 W 多项式。试证

$$s_n(f;x)=f(x)。$$

17．试证级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k w_k(x)$$

是 $L^q_{[0,1]}(1<q<+\infty)$ 中某函数 $f(x)$ 的 W 展式的充要条件是

$$\|s_{2^n}(\circ)-s_{2^m}(\circ)\|_q\to 0\quad(n,m\to\infty),$$

其中

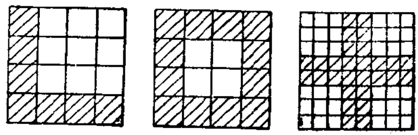
$$s_{2^n}(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}c_k w_k(x)。$$

若 $q=1$，结论又如何？

18. 设 $n=(n_{-(s-1)}n_{-(s-2)}\cdots n_0)$， $x=(0;x_1x_2\cdots)$，求证

$$w_n(x)=(-1)^{\sum\limits_{r=0}^{s-1}n_{-r}x_{r+1}}。$$

19. 试用适当的二元 W 函数的线性组合来合成下列图形："L"，"□"，"十"。



第 3 章

有限 Walsh 变换

对离散信号进行 Walsh 分析，必须用到有限 Walsh 变换（简称 W 变换）。本章将介绍有限 W 变换的基本知识，包括 W 函数的生成、W 变换与逆变换，以及 W 变换的常用的一种变形：有限 Hadamard 变换（简称 H 变换）。为了在机器上实际产生出 W 函数，还须讨论 Walsh 矩阵（简称 W 矩阵）的另一种变形，即二进 W 矩阵。

§1 W 函数的生成

首先给出 R 函数的向量表示。R 函数除了用第二章 §1 中的分析式表示外，还能表为二进向量的形式。这种表示法在生成 W 函数、二进 W 矩阵以及制作 W 函数发生器等课题中都要用到。通常示波器中的方波波形也正是用 R 函数的向量表示显示出来的。

为方便起见，在 R 系中添加一个常数 1，使 R 系成为 $\{1, \varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots\}$。对每个自然数 n，我们将同时给出 $n+1$ 个 R 函数 $1, \varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ 的 2^n 维向量表示，并分别用 $R_0, R_1, R_2, \cdots, R_n$ 来记它们。具体方法如下。

把区间 $[0, 1)$ 等分为 2^n 个左闭右开的子区间，其分点记为 $x_0=0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}$，把每个分点的附标 k 用二进代码表示，令

$$k = k_{-(n-1)}\cdot 2^{n-1} + k_{-(n-2)}\cdot 2^{n-2} + \cdots + k_{-1}\cdot 2 + k_0,$$

并记

$$k=(b_{k1}\ b_{k2}\ \cdots\ b_{kn}),\quad b_{kj}\in\{0,1\},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1,\quad (3.1)$$

其中 $b_{kj}=k_{-(n-j)}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，则首 $n+1$ 个 R 函数的二进向量表示为

$$R_j=(R_{j0}\ R_{j1}\cdots\ R_{j,2^n-1}),\quad j=0,\ 1,\cdots,\ n。\quad (3.2)$$

这里 $R_{0k}\equiv1$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1$；

$R_{jk}=1-2b_{kj}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1$。

因而我们有

$$R_{jk}=\begin{cases}1, & 当\ b_{kj}=0\ 时，\\ -1, & 当\ b_{kj}=1\ 时。\end{cases}\quad (3.3)$$

下面就 $n=3$ 的情形来说明 R_0，R_1，R_2，R_3 的向量表示。

把区间 $[0,\ 1)$ 等分为 $2^3=8$ 个子区间，得 8 个分点 x_0，x_1，…，x_7。它们的附标 k 的二进表示是

$0=(0\ 0\ 0)$，　　$4=(1\ 0\ 0)$，

$1=(0\ 0\ 1)$，　　$5=(1\ 0\ 1)$，

$2=(0\ 1\ 0)$，　　$6=(1\ 1\ 0)$，

$3=(0\ 1\ 1)$，　　$7=(1\ 1\ 1)$。

故由(3.2)与(3.3)得 R_0，R_1，R_2，R_3 的向量表示式

$$\begin{aligned}R_0&=(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1),\\ R_1&=(1\quad 1\quad 1\quad 1\quad -1\quad -1\quad -1\quad -1),\\ R_2&=(1\quad 1\quad -1\quad -1\quad 1\quad 1\quad -1\quad -1),\\ R_3&=(1\quad -1\quad 1\quad -1\quad 1\quad -1\quad 1\quad -1)。\end{aligned}\quad (3.4)$$

作图时，只要把$[0,1)$区间分为 2^n 等分；$R_j(j=0,\ 1,\ \cdots,n)$的每个分量 R_{jk} 就是 R_j 在小区间 $[x_k,\ x_{k+1})$ 上的值，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1$(参看图 2.1)。

实际上，可按下面步骤同时得到 R_0，R_1，…，R_n：

1. 记住每个 $R_j=(R_{j0}\ R_{j1}\ \cdots\ R_{j,2^n-1})$，$j=0, 1, \cdots, n$，是 2^n 维向量；

2. $R_0=(1\ 1\ \cdots\ 1\ 1)$，即 R_0 的每个分量为 1；

3. R_j, $j=1, 2, \cdots, n$ 的分量之中有一半为 1，一半为 -1，其分布规律如下：

R_1：先出现 2^{n-1} 个 1，再出现 2^{n-1} 个 -1；

R_2：2^{n-2} 个 1 与 2^{n-2} 个 -1 相间出现；

R_3：2^{n-3} 个 1 与 2^{n-3} 个 -1 相间出现；

……

R_{n-1}：$2^{n-(n-1)}=2$ 个 1 与 2 个 -1 相间出现；

R_n：$2^{n-n}=1$ 个 1 与 1 个 -1 相间出现。

不难验证，由(3.2)给出的 R 系的表示式与分析表达式所定义的 R 函数是一致的，只是前者多了一个常数 R_0。事实上，对 $n=1, 2, \cdots$，当把区间分为 2^n 等分时，在每个小区间上，函数

$$\varphi_{n-1}(x)=\mathrm{sgn}[\sin(2^n\pi x)]$$

依次取 $1, -1, \cdots, 1, -1$，共 2^n 个。另一方面，由(3.2)知

$$R_n=(R_{n0}\ R_{n1}\ \cdots\ R_{n,2^n-1})=(1-2b_{0n}\ 1-2b_{1n}\ \cdots\ 1-2b_{2^n-1,n}),$$

而这里 $b_{0n}, b_{1n}, \cdots, b_{2^n-1,n}$ 恰好是分点 $x_0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}$ 的附标的二进代码中最后一位码字，它们依次是 $0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1$，共 2^n 个，所以

$$R_n=(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1\ \cdots\ 1\ \ -1)$$

是一个 2^n 维向量，与 $\varphi_{n-1}(x)$ 完全一致。

应当指出，首 $n+1$ 个 R 函数 $R_0, R_1, \cdots, R_n$ 作为一个整组，可以写为 2^n 维向量，但对于正整数 m, $m>n$，它们也可写成 2^m 维向量。例如 R_2，当 $n=2$ 时为 $R_2=(1\ \ -1\ \ 1\ \ -1)$，

但对 $n=3$，4 时，又可分别表示为

$$R_2=(1\ \ 1\ \ -1\ \ -1\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ -1)$$

与

$$R_2=(1\,1\,1\,1-1-1-1-1\,1\,1\,1\,1-1-1-1-1)。$$

尽管如此，由 R 函数向量表示的定义易知，虽然 $R_j(j=0,1,\cdots)$能表示为不同维数的向量，但 R_j 在 $[0, 1)$区间上改号次数仍为 2^j-1，与表示方式无关。

有了 R 函数的向量表示后，便可得到 W 函数的向量表示，因为 W 函数是某些 R 函数的直积。

任意两个 n 维向量

$$x=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n),\quad y=(y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_n)$$

的直积定义为向量 xy：

$$xy=(x_1y_1\ \ x_2y_2\ \ \cdots\ \ x_ny_n)。$$

利用首 $n+1$ 个 R 函数的直积可以产生首 2^n 个 W 函数，得到的是这些函数的向量表示。

设 $R_0, R_1, \cdots, R_n$ 为首 $n+1$ 个 R 函数，令 $wal_0=R_0$，然后作 $R_1, \cdots, R_n$ 的所有可能的直积，按照每个这样的直积在 $[0, 1)$ 上改号次数的大小顺序依次排列，使后一直积的改号数比前一直积多一次，于是便得到首 2^n 个 W 函数：wal_0, wal_1, $\cdots$, wal_{2^n-1}。这里的记号 $wal_j\,(j=0, 1, \cdots, 2^n-1)$代表 W 函数 $wal_j(x)$（见第二章§2)的 2^n 维向量表示。

例如 $n=3$ 时，首 $n+1=4$ 个 R 函数 R_0, R_1, R_2, R_3 如(3.4) 所给出的那样。令 $wal_0=R_0$。R_1, R_2, R_3 的所有可能的直积为

R_1, R_2, R_3	共 c_3^1 个，
R_1R_2, R_1R_3, R_2R_3	共 c_3^2 个，
$R_1R_2R_3$	共 c_3^3 个。

这样一共形成 $1+c_3^1+c_3^2+c_3^3=(1+1)^3=2^3$ 个 W 函数，次序是按照它们在 $[0, 1)$ 上改变符号的递增次序排列的：

$$wal_0=R_0=(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1),$$
$$wal_1=R_1=(1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1),$$
$$wal_2=R_1R_2=(1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1),$$
$$wal_3=R_2=(1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1),$$
$$wal_4=R_2R_3=(1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1),$$
$$wal_5=R_1R_2R_3=(1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1),$$
$$wal_6=R_1R_3=(1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1),$$
$$wal_7=R_3=(1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1)。$$

显然，wal_k 在 $[0, 1)$ 上的改号次数恰好是 k $(k=0, 1, \cdots, 7)$。

一般地，由首 $n+1$ 个 R 函数 $R_0, R_1, \cdots, R_n$ 生成 W 函数时，其个数是

$$1+c_n^1+c_n^2+\cdots+c_n^{n-1}+c_n^n=(1+1)^n=2^n,$$

得到所有可能的直积后，排列次序可由 k 的 Gray 码来提供。

设 $0\leqslant k<2^n$，令

$$k=k_{-(n-1)}\cdot 2^{n-1}+k_{-(n-2)}\cdot 2^{n-2}+\cdots+k_{-1}\cdot 2^1+k_0\cdot 2^0,$$

于是 k 与它的 Gray 码 $G(k)$ 分别表示为

$$k=(k_{-(n-1)}\ k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\ k_0), \tag{3.5}$$

$$G(k)=(k'_{-(n-1)}\ k'_{-(n-2)}\ \cdots\ k'_{-1}\ k'_0), \tag{3.6}$$

其中 $k'_{-j}=k_{-j}\oplus k_{-(j+1)}$，$j=0, 1, \cdots, n-1$，$k_{-n}=0$。

第 k 个 W 函数的直积表示是

$$wal_k=R_n^{k'_{-(n-1)}}R_{n-1}^{k'_{-(n-2)}}\cdots R_2^{k'_{-1}}R_1^{k'_0}, \tag{3.7}$$

这里，当 $k'_{-(j-1)}=0$ 时，令 $R_j^{k'_{-(j-1)}}\equiv R_0$，这种 R_j 不出现在直积式中。

据 W 函数的定义（第二章§2）并参照习题2.4，我们有 W 函数的分析表示式

$$wal_k(x) = \prod_{l=0}^{n-1} [\varphi_l(x)]^{k'_{-l}}$$

$$= [\varphi_{n-1}(x)]^{k'_{-(n-1)}} [\varphi_{n-2}(x)]^{k'_{-(n-2)}} \cdots [\varphi_0(x)]^{k'_0}, \qquad (3.8)$$

而读者记得 $\varphi_{n-1}(x)$，$\varphi_{n-2}(x)$，…，$\varphi_0(x)$的向量表示恰是 R_n，R_{n-1}，…，R_1。这正表明由 k 的 Gray 码 $G(k)$ 提供的 W 函数的直积形式(3.7)与 W 函数的分析表示式(3.8)是一致的。

这样，求向量表示 wal_k 的步骤如下：

1．对于 k，找出适当的 n，满足

$$2^{n-1} \leqslant k < 2^n;$$

2．把 k 表示成 n 维向量

$$k = (k_{-(n-1)}\ k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\ k_0);$$

3．求出 k 的 Gray 码

$$G(k) = (k'_{-(n-1)}\ k'_{-(n-2)}\ \cdots\ k'_{-1}\ k'_0);$$

4．由 $G(k)$ 便可写出

$$wal_k = R_n^{k'_{-(n-1)}} R_{n-1}^{k'_{-(n-2)}} \cdots R_2^{k'_{-1}} R_1^{k'_0}。$$

例 据直积形式，求 wal_{11}。

【解】 $2^3 < 11 < 2^4$，故取 $n = 4$。

由 $11 = (1\ 0\ 1\ 1)$，$G(11) = (1\ 1\ 1\ 0)$，得 $wal_{11} = R_4R_3R_2$。把 R_4，R_3，R_2 表示为 $2^4 = 16$ 维向量：

$$R_4 = (1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1),$$

$$R_3 = (1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1),$$

$$R_2 = (1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1),$$

取直积便得

$$wal_{11} = (1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1)。$$

它的图形见图3.1。

在第二章§3中关于W函数的性质7°表明，$wal_k(x)$在$[0, 1)$上的改号次数为k，这就保证了用(3.8)给出的$wal_k(x)$是按照它们在$[0, 1)$上改号的递增次序排列的。我们还可以用归纳法直接证明，(3.7)中所表示的wal_k在$[0, 1)$上的改号次数为k。为此，首先注意下面两个明显的性质：

(i) wal_k满足公式

$$wal_k = wal_{2^s-1} \cdot wal_{2^s-1-k},$$
$$k = 2^{s-1}, 2^{s-1}+1, \cdots, 2^s-1, \quad s = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.9}$$

又因$R_j = wal_{2^j-1}$，$j = 0, 1, \cdots, n$，上式可改写为

$$wal_k = R_s \cdot wal_{2^s-1-k},$$
$$k = 2^{s-1}, 2^{s-1}+1, \cdots, 2^s-1, \quad s = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.10}$$

(ii) R_s与某个改号m次的向量的直积，是一个改号次数为2^s-1-m的向量。

为了证明wal_k的改号次数是k，把由$R_0, R_1, \cdots, R_s$生成的2^s-1个W函数排列如下：

$$\left.\begin{array}{l} wal_0 \\ wal_1 \\ \vdots \\ wal_{2^{s-1}-2} \\ wal_{2^{s-1}-1} \end{array}\right\} wal_{2^s-1-k}$$

$$\left.\begin{array}{l} wal_{2^{s-1}} \\ wal_{2^{s-1}+1} \\ \vdots \\ wal_{2^s-2} \\ wal_{2^s-1} \end{array}\right\} wal_k,$$

其中 $k=2^{s-1}, 2^{s-1}+1, \cdots, 2^s-1, s=1, 2, \cdots, n$，相应地，序号 $2^s-1-k=2^{s-1}-1, 2^{s-1}-2, \cdots, 1, 0$。

从上面排列可见，它们以中心虚线为轴，分为上、下两部分，而且下面一半的 $wal_k(k=2^{s-1}, 2^{s-1}+1, \cdots, 2^s-1)$ 与上一半的 wal_{2^s-1-k} 满足关系

$$wal_k=R_s\cdot wal_{2^s-1-k},\ k=2^{s-1},\ 2^{s-1}+1,\ \cdots,\ 2^s-1。\quad (3.11)$$

当 $s=1$ 时，上述排列成为

$$wal_0=(1\quad 1)$$

$$wal_1=(1\quad -1),$$

wal_0，wal_1 的改号次数分别为 0 与 1，故我们的命题对 $s=1$ 成立。

设命题对 $s-1$ 成立，即 $wal_0, wal_1, \cdots, wal_{2^{s-1}-1}$ 的改号次数分别为 0，1，…，$2^{s-1}-1$，它们恰居上述排列的上面一半，则由(3.11)，知排列的下一半 $wal_k=R_s\cdot wal_{2^s-1-k}$，于是由性质 (ii) 立即得到下一半函数 $wal_{2^{s-1}}, wal_{2^{s-1}+1}, \cdots, wal_{2^s-1}$ 的改号次数为 $2^{s-1}, 2^{s-1}+1, \cdots, 2^s-1$。故命题对 s 也成立。

最后，讨论生成 W 函数的其他两种方法：Swich 方法[21] 与 Peterson 方法[16]。这两种方法的特点是：不需借助任何其他函数而能直接写出所要求的某一个 W 函数，因此便于在数字滤波中应用。

Swich 方法是利用 k 的二进代码(3.5)，对称地确定 wal_k 的图形，故也称对称法。

此法分两步。设 $k=(k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\,\cdots\,k_{-1}\,k_0)$。

第一步　当 $x\in[0,1/2^n)$ 时，规定 $wal_k=1$，

第二步　当 $x\in[0,1/2^{j-1})$ 时，$j=n, n-1, \cdots, 1$。

若 $k_{-(j-1)}=1$，则使 wal_k 在 $[0, 1/2^{j-1})$ 上的值关于点

$x=1/2^j$ 是奇对称的。

若 $k_{-(j-1)}=0$，则使 wal_k 在$[0, 1/2^{j-1})$上的值关于点 $x=1/2^j$ 是偶对称的。

由上述对称法生成的 W 函数，除有限个点（函数改号点）外，与第二章§2 中定义的 $wal_k(x)$ 一致。若适当修改由对称法得到的 W 函数在改号点处的函数值，使生成的函数为右连续，那么可以证明对称法产生的函数与 $wal_k(x)$ 完全一致。为此，我们只须证明由(2.12)定义的 $wal_k(x)$ 在区间$[0, 1)$上除有限个点以外确实具有对称法的二个步骤中所述的性质。

由习题 2.4 知，(2.12)式可改写为

$$wal_k(x)=\prod_{l=1}^{n}[\psi_{l-1}(x)]^{k_{-(l-1)}}, \tag{3.12}$$

其中 $\psi_{l-1}(x)$为 L 函数（参看(2.9)式）。不难看出 L 函数有下述性质：

当 $x\in(0, 1/2^{j-1})$, $x\neq1/2^l$, $l=1, 2, \cdots, n$ 时，有

$$\psi_{l-1}\left(\frac{1}{2^{j-1}}-x\right)=\psi_{l-1}(x), \quad 若 l>j; \tag{3.13}$$

$$\psi_{l-1}\left(\frac{1}{2^{j-1}}-x\right)=-\psi_{l-1}(x), \quad 若 l=j; \tag{3.14}$$

$$\psi_{l-1}(x)=1, \quad 若 l<j, \tag{3.15}$$

其中 $j=1, 2, \cdots, n$。

这个性质表明，在区间$[0, 1/2^{j-1})$上，n 个函数 $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_{n-1}(x)$ 中，只有一个函数 $\psi_{j-1}(x)$ 关于区间 $(0, 1/2^{j-1})$ 的中心点 $x=1/2^j$ 是奇对称的，其余的函数都是偶对称的（除有限个点外）。

于是，若 $k_{-(j-1)}=0$，则(3.12)右边的乘积中不出现因子 $\psi_{j-1}(x)$，由(3.13)与(3.15)知此乘积中其余因子关于点 $x=1/2^j$ 都是偶对称的，从而整个乘积，即 $wal_k(x)$ 在$[0, 1/2^{j-1})$

上关于 $x=1/2^j$ 是偶对称的。而若$k_{-(j-1)}=1$，(3.12)的乘积中必定出现因子 $\psi_{j-1}(x)$，但是(3.14)表明 $\psi_{j-1}(x)$在$(0,1/2^{j-1})$上关于 $1/2^j$ 是奇对称的，故 $wal_k(x)$ 在 $[0,1/2^{j-1})$ 上关于 $x=1/2^j$ 是奇对称的。最后，当 $k<2^n$ 时，显然 $wal_k(x)$ 在区间 $[0,1/2^n)$上取常值 1。这就是所要证明的。

用对称法可以简捷地单独作出任一个 $wal_k(x)$的图形，并且当 k 很大时，比用直积法作图要方便得多。

例 1 利用对称法作 wal_{11} 的图形。

因 $2^3<11<2^4$，应取 $n=4$，注意到 $11=(1\ 0\ 1\ 1)$，据所述方法可列表表示 wal_{11} 的生成过程：

表 3.1

序号 k	对称关系	x 的范围			
$k=11=(1\,0\,1\,1)$		$[0,1/8)$	$[1/8,1/4)$	$[1/4,1/2)$	$[1/2,1)$
$k_{-3}=1$	奇对称	1 ┊ −1			
$k_{-2}=0$	偶对称	1 −1 ┊ −1 1			
$k_{-1}=1$	奇对称	1 −1 −1 1 ┊ −1 1 1 −1			
$k_0=1$	奇对称	1−1−11−111−1 ┊ 1−1−11−111−1			

图 3.1 便是 wal_{11} 的产生过程。故有

$$wal_{11}=(1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1)。$$

Peterson 方法是利用 k 的 Gray 码(3.6)来生成 wal_k：

设 $k=(k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\,k_0)$，

$$G(k)=(k'_{-(n-1)}\,k'_{-(n-2)}\ \cdots\ k'_{-1}\,k'_0),$$

当 $x\in[0,1/2^n)$时，规定 $wal_k=1$，

当 $x\in[1/2^j,1/2^{j-1})$时，使 wal_k的值等于它在 $[0,1/2^j)$中的值乘以$(-1)^{k'_{-(j-1)}}$，$j=n,n-1,\cdots,1$。即

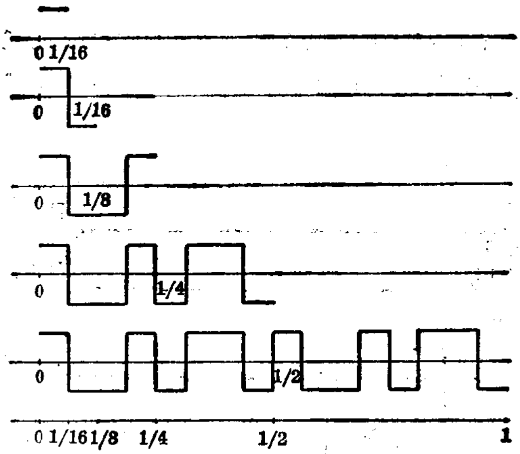


图 3.1

$$wal_k(x+1/2^j)=(-1)^{k'_{-(j-1)}}wal_k(x),\quad x\in[0,1/2^j)。\tag{3.16}$$

关于 Peterson 方法正确性的证明留给读者。

例 2 利用 Peterson 方法作出 wal_{11} 的图形。

由 $11=(1\ 0\ 1\ 1)$，$G(11)=(1\ 1\ 1\ 0)$知

$$k'_{-3}=k'_{-2}=k'_{-1}=1,\ k'_0=0。$$

列表表示 wal_{11} 的生成过程：

表 3.2

$G(k)$ $(1\ 1\ 1\ 0)$	所乘因子	x 的范围 $[0,1/16)$	$[1/16,1/8)$	$[1/8,1/4)$	$[1/4,1/2)$	$[1/2,1)$
$k'_{-3}=1$	$(-1)^{k'_{-3}}=-1$	1	-1			
$k'_{-2}=1$	$(-1)^{k'_{-2}}=-1$			$-1\ 1$		
$k'_{-1}=1$	$(-1)^{k'_{-1}}=-1$				$-1\ 1\ 1\ -1$	
$k'_0=0$	$(-1)^{k'_0}=1$					$1\ -1\ -1\ 1$ $-1\ 1\ 1\ -1$

因而同样得

$$wal_{11} = (1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1)。$$

仿照图 3.1，也可作出由 Gray 码关系产生 wal_{11} 的过程，见图 3.2。

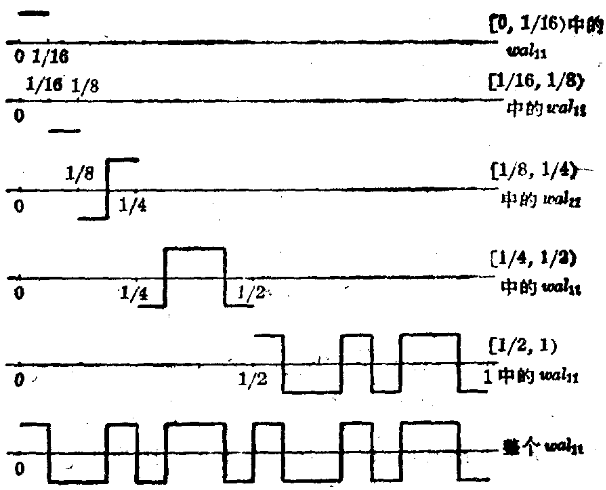


图 3.2

§2 W 矩 阵

在本章§3 中将要讨论离散 W 变换，由于这种变换通常通过 W 矩阵表示，故本节先讨论 W 矩阵。

设 $N \leqslant 2^n$。把 $wal_0, wal_1, \cdots, wal_{N-1}$ 的 2^n 维向量表示

$$wal_k = (w_{k0}\ w_{k1} \cdots w_{k,2^n-1}),\quad k = 0, 1, \cdots, N-1, \quad (3.17)$$

顺次放在矩阵的各行中，便得到一个 $N \times 2^n$ 阶矩阵，称为 **W 函数的矩阵表示，简称 W 矩阵**，记为 $[W]$：

$$[W]=\begin{bmatrix} wal_0 \\ wal_1 \\ \vdots \\ wal_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0,2^n-1} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1,2^n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & \cdots & w_{N-1,2^n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

当 $N=2^n$ 时，$[W]$ 就成为一个 2^n 阶方阵，记为 $[W_{2^n}]$：

$$[W_{2^n}]=\begin{bmatrix} wal_0 \\ wal_1 \\ \vdots \\ wal_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0,2^n-1} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1,2^n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{2^n-1,0} & w_{2^n-1,1} & \cdots & w_{2^n-1,2^n-1} \end{bmatrix}。 \quad (3.19)$$

例如 wal_0，wal_1，…，wal_5 所成的矩阵

$$[W]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

为 6×2^3 阶矩阵。又如当 $N=2^2$ 时，所得 W 矩阵为 4 阶方阵：

$$[W_{2^2}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}。$$

在离散 W 变换中大多用方阵 $[W_{2^n}]$，它们具有如下基本性质。

性质 1° $[W]$ 中的每个元素 w_{kj} 代表 $wal_k(x)$ 在小区间 $[j/2^n, (j+1)/2^n)$ 上的值。

事实上，第 k 个 W 函数

$$wal_k = (w_{k0}\ w_{k1}\ \cdots\ w_{k,2^n-1}) \quad (k=0, 1, \cdots, N-1)$$

是矩阵 $[W]$ 中的第 k 行，即 wal_k 的 (2^n 维) 向量表示，而其分量 w_{kj} 正是 $wal_k(x)$ 在小区间 $[j/2^n, (j+1)/2^n)$ 上的值 ($j=0, 1, \cdots, 2^n-1$)。由于 $wal_k(x)$ 在每个这样的小区间上是常数，故可把 w_{kj} 看成 $wal_k(x)$ 在 $[j/2^n, (j+1)/2^n)$ 中任一点的值。

性质 2° 方阵 $[W_{2^n}]$ 是直交方阵。

证 由 W 函数的直交性知

$$\int_0^1 wal_k(x)\, wal_j(x)\, dx = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k\neq j, \end{cases} \tag{3.20}$$

因 $wal_k(x)$ 在 $[0, 1)$ 上为阶梯函数，据性质 1°，积分

$$\int_0^1 wal_k(x)\, wal_j(x)\, dx = \sum_{l=0}^{2^n-1} w_{kl}\cdot w_{jl}\cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}(wal_k, wal_j),$$

这里 (wal_k, wal_j) 表示向量 $wal_k = (w_{k0}\ w_{k1}\ \cdots\ w_{k,2^n-1})$ 与 $wal_j = (w_{j0}\ w_{j1}\ \cdots\ w_{j,2^n-1})$ 的内积，由 (3.20)，这个内积当 $k=j$ 时为 2^n，而当 $k\neq j$ 时为 0。因此方阵 $[W_{2^n}]$ 中任意两个不同的行向量的内积为 0，故 $[W_{2^n}]$ 为直交方阵。

性质 3° 方阵 $[W_{2^n}]$ 是对称方阵。即若以 $[W_{2^n}]^T$ 表示 $[W_{2^n}]$ 的转置方阵，则有

$$[W_{2^n}]^T = [W_{2^n}]。$$

证 令 $[W_{2^n}] = (w_{kj})$，$k, j = 0, 1, \cdots, 2^n-1$。只须证明 $w_{kj} = w_{jk}$ 就够了。

设 $k = (k_{-(n-1)}\, k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\, k_0)$，

$$j=(j_{-(n-1)}\,j_{-(n-2)}\cdots j_{-1}\,j_0),$$

而k的Gray码为

$$G(k)=(k'_{-(n-1)}\,k'_{-(n-2)}\cdots k'_{-1}\,k'_0),$$

其中$k'_{-l}=k_{-l}\oplus k_{-(l-1)}$，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

由性质1°，并利用(3.8)，w_{kj}有表示式

$$w_{kj}=wal_k(j/2^n)=\prod_{l=1}^{n}[\varphi_{l-1}(j/2^n)]^{k'_{-(l-1)}},$$

令$j/2^n=0.\theta_1\theta_2\cdots\theta_{2n}$，由$R$函数二进表示(2.4)知

$$\varphi_{l-1}(j/2^n)=(-1)^{\theta_l}。$$

注意到j的二进表示，知θ_l对应于$j_{-(n-l)}$，于是

$$w_{kj}=\sum_{l=1}^{n}[(-1)^{\theta_l}]^{k'_{-(l-1)}}=(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n}j_{-(n-l)}k'_{-(l-1)}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n}j_{-(n-l)}(k_{-l}\oplus k_{-(l-1)})}. \tag{3.21}$$

现在我们约定$k_{-n}=0$，$j_{-n}=0$，则

$$w_{jk}=(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n}k_{-(n-l)}(j_{-l}\oplus j_{-(l-1)})}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{n}(k_{-(n-l)}j_{-l}\oplus k_{-(n-l)}j_{-(l-1)})}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{s=n}^{1}(k_{-s}j_{-(n-s)}\oplus k_{-s}j_{-(n-s-1)})}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n}(j_{-(n-s)}k_{-s}\oplus j_{-(n-s)}k_{-(s-1)})}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n}j_{-(n-s)}(k_{-s}\oplus k_{-(s-1)})}, \tag{3.22}$$

从而$w_{kj}=w_{jk}$。性质3°证毕。

性质4°　$[W_{2^n}][W_{2^n}]^T=2^n[I]$，

这里$[I]$是2^n阶单位方阵。

证　由性质3°知$[W_{2^n}]=[W_{2^n}]^T$，故

$$[W_{2^n}][W_{2^n}]^T=[W_{2^n}]\cdot[W_{2^n}]=\left[\sum_{l=0}^{2^n-1}w_{kl}w_{lj}\right]。$$

当 $k=j$ 时 $\sum_{l=1}^{2^n-1}w_{kl}w_{lk}=\sum_{l=1}^{2^n-1}w_{kl}w_{kl}=\sum_{l=1}^{2^n-1}w_{kl}^2=2^n$,

当 $k\neq j$ 时，$\sum_{l=1}^{2^n-1}w_{kl}w_{lj}=0$,

$$\therefore\quad [W_{2^n}]\cdot[W_{2^n}]^T=\begin{bmatrix}2^n & & 0\\ & 2^n & \\ 0 & & \ddots\ 2^n\end{bmatrix}=2^n[I]。$$

证毕。

§3 有限 W 变换

在 Fourier 变换的理论中，对函数 $f\in L^q_{2\pi}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 定义

$$f^\wedge(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)e^{-iku}du,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

为 f 的有限 Fourier 变式。对于 Walsh 分析，也可类似地讨论函数 $f\in L^q_{[0,1)}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$ 的有限 W 变式。

首先考虑函数空间 $L_{[0,1)}$ 上的有限 W 变式。

设 $f\in L_{[0,1)}$。f 的**有限 W 变式**是定义在非负整数集 $P=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的函数 $f^\wedge(k)$:

$$f^\wedge(k)=\int_0^1 f(x)w_k(x)dx,\quad k\in P,\tag{3.23}$$

其中 $w_k(x)$ 是自然序 W 函数。

就是说，f 的有限 W 变式 $f^\wedge$ 是一个序列 $\{f^\wedge(k)\}$，其中第 k 个元是 f 的第 k 个 Walsh-Fourier 系数（简称 W 系数）。

这变式有如下基本性质：

定理 1 设 $f\in L_{[0,1)}$，则有

(i) $[f(x\oplus h)]^\wedge(k)=w_k(h)f^\wedge(k)$, $\quad 0\leqslant h<1,\ k\in P$；

(ii) $[w_j(x)f(x)]^\wedge(k)=f^\wedge(k\oplus j)$, $\quad j,k\in P$；

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}f^\wedge(k)=0$；

(iv) $[\overline{f(x)}]^\wedge(k)=\overline{f^\wedge(k)}$；

(v) $f^\wedge(k)=0,\ k\in P$，则 $f(x)=0$ (a.e.)；

(vi) $|f^\wedge(k)|\leqslant\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$, $\quad k\in P$。

证明可由定义并参考第二章 §4 定理 2 与定理 4 而得。

众所周知，(i)是有限 W 变换的时移性质；(ii)是频延性质；(iii)是 Riemann-Lebesgue 引理；(iv)是关于复共轭的变式；(v)是唯一性。值得注意的是(vi)，它表明有限 W 变换实现了空间 $L_{[0,1)}$ 到有界数列空间 $l_0^\infty=\{(\alpha_k):\sup\limits_k|\alpha_k|<+\infty\}$ 的一个线性变换，并且范数非增。

为考虑 W 变换进一步的性质，我们引入逻辑卷积的概念。

设 $f,\ g\in L_{[0,1)}$，称下述积分为两函数 f 与 g 的**逻辑卷积**：

$$(f\circledast g)(x)=\int_0^1 f(x\ominus t)g(t)dt,\quad x\in[0,1), \tag{3.24}$$

由于在二进情形下，$\oplus$ 与 $\ominus$ 为同一运算，故 f、g 的二进情形的逻辑卷积也可写成

$$(f\circledast g)(x)=\int_0^1 f(x\oplus t)g(t)dt。 \tag{3.25}$$

本节就二进情形进行讨论。($p>2$ 参看第四章 §7。)

显然，逻辑卷积有对称性：

$$(f\circledast g)(x)=(g\circledast f)(x), \tag{3.26}$$

这只要在积分(3.25)中作二进移位变换就可得到(参看第二章§4引理1)。

定理 2 设 $f, g \in L_{[0,1)}$，则

(i) $[\alpha f+\beta g]^\wedge(k)=\alpha f^\wedge(k)+\beta g^\wedge(k)$，$k\in P$，$\alpha$，$\beta$ 为常数；

(ii) $f \circledast g \in L_{[0,1)}$，且 $[f\circledast g]^\wedge(k)=f^\wedge(k)g^\wedge(k)$，$k\in P$。

证 由定义即得(i)。至于(ii)，由卷积的定义与 Fubini 定理，有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |(f\circledast g)(x)|\,dx &= \int_0^1 \left|\int_0^1 f(x\oplus t)g(t)\,dt\right| dx \\
&\leqslant \int_0^1\int_0^1 |f(x\oplus t)g(t)|\,dt\,dx \\
&\leqslant \int_0^1 |g(t)|\,dt \int_0^1 |f(x\oplus t)|\,dx \\
&= \|g\|_1\cdot\|f\|_1,
\end{aligned}
$$

故 $(f\circledast g)\in L_{[0,1)}$，且

$$
\begin{aligned}
[f\circledast g]^\wedge(k) &= \int_0^1\left[\int_0^1 f(x\oplus t)g(t)\,dt\right]w_k(x)\,dx \\
&= \int_0^1 g(t)\left[\int_0^1 f(x\oplus t)w_k(x)\,dx\right]dt \\
&= \int_0^1 g(t)w_k(t)f^\wedge(k)\,dt \\
&= f^\wedge(k)\int_0^1 g(t)w_k(t)\,dt \\
&= f^\wedge(k)g^\wedge(k)。
\end{aligned}
$$

如果在 $L_{[0,1)}$ 中以卷积⊛作为其元素之间的运算，则 $L_{[0,1)}$ 构成一个 Banach 代数。

对于 $[0,1)$ 上 q 次幂 L 可积函数全体组成的函数空间

$$L^q_{[0,1)}=\{f: \|f\|_q=\left\{\int_0^1|f(x)|^q dx\right\}^{1/q}<\infty\},$$

有限 W 变式的定义仍采用(3.23)。对 $1<q\leqslant 2$，可以证明，有限 W 变换实现了 $L^q_{[0,1)}$ 到 $l^{q'}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$的线性变换，并且范数非增：

$$\|f^\wedge\|_{l^{q'}}\leqslant\|f\|_q。\tag{3.27}$$

这里 $l^{q'}$ 是数列空间：$l^{q'}=\{(\alpha_k): \sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^{q'}<\infty\}$，而 $\alpha=(\alpha_k)\in l^{q'}$ 的范数 $\|\alpha\|_{l^{q'}}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^{q'}\right\}^{1/q'}$。

当 $q=2$ 时，(3.27)恰为 $\|f^\wedge\|_{q'}=\|f\|_q$，即 Parseval 公式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f^\wedge(k)|^2=\int_0^1|f(x)|^2dx。$$

还可以得到关于有限 W 变换的反演公式等结果，在此不再介绍。读者可参看[6]。

下面讨论在离散情形下的有限 W 变换。在工程技术上采用的有限 W 变换是列率序的：

$$a_k=\int_0^1 f(x)wal_k(x)dx,\tag{3.28}$$

并且，对于信号 $f(x)$，一般是给出采样值，亦即给出 $[0, 1)$区间上的一个向量(f_j)，$j=0, 1, \cdots, N$。要对它进行 W 变换，就得先把(3.28)离散化，用一个积分和近似地代替(3.28)，在一定的精度范围内进行计算。

设在区间 $[0, 1)$上给出信号 $f(x)$，我们考虑它在诸区间 $[j/2^n, (j+1)/2^n)$ 上的一组采样值 f_j，$j=0, 1, \cdots, 2^n-1$。若把 $f(x)$ 在 $[j/2^n, (j+1)/2^n)$ 上的值用它的采样值 f_j 代替，则 $f(x)$ 的 W 系数 a_k 可以近似地表为

$$a_k = \int_0^1 f(x) wal_k(x) dx \doteq \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j wal_k(j/2^n) \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j w_{kj}。$$

为方便起见，略去常数因子 $1/2^n$，而称

$$a_k = \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j w_{kj}, \quad k = 0, 1, \cdots, 2^n-1, \qquad (3.29)$$

为离散信号 $f_0, f_1, \cdots, f_{2^n-1}$ 的**有限 W 变换**。

把 $a_0, a_1, \cdots, a_{2^n-1}$ 排成一个列向量

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2^n-1} \end{bmatrix},$$

显然它可以由向量

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

左乘 W 矩阵 $[W_{2^n}]$ 而得到

$$\boldsymbol{a} = [W_{2^n}]\boldsymbol{f}。$$

一般地，对向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

定义它的**有限 W 变换**为

$$[W_{2^n}]\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0,2^n-1} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1,2^n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{2^n-1,0} & w_{2^n-1,1} & \cdots & w_{2^n-1,2^n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix}。 \qquad (3.30)$$

记 $[W_{2^n}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}$ 为 2^n 维列向量，其分量是

$$y_k=\sum_{j=0}^{2^n-1} w_{kj}x_j,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1。$$

由第三章§2 中W矩阵的性质 4°，知 $2^{-n}[W_{2^n}]^T$ 是$[W_{2^n}]$的逆方阵。但由性质 3°，

$$[W_{2^n}]^T=[W_{2^n}],$$

因此

$$(2^{-n}[W_{2^n}])^{-1}=[W_{2^n}]。$$

从而由式

$$[W_{2^n}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

可"解出"$\boldsymbol{x}$：

$$\boldsymbol{x}=[W_{2^n}]^{-1}\boldsymbol{y}=\frac{1}{2^n}[W_{2^n}]\boldsymbol{y}。\tag{3.31}$$

据此，称 $\boldsymbol{x}$ 为向量 $\boldsymbol{y}$ 的**逆 W 变换**，它与原变换具有同样的矩阵表示，只是相差一常数因子。若用 T_W 表示有限 W 变换的方阵，则 T_W 可看成一个算子，它的逆算子为

$$T_W^{-1}=\frac{1}{2^n}T_W,$$

并且有变换公式及反演公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}=T_W\boldsymbol{x}, & (3.32)\\ \boldsymbol{x}=T_W^{-1}\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{2^n}T_W\boldsymbol{y}。 & (3.33)\end{cases}$$

例 1 设有某一信号的一组采样值：

$x_0=0.0000$，　　$x_1=0.1002$，

$x_2=0.2013$，　　$x_3=0.3045$，

$x_4=0.4108$，　　$x_5=0.5211$，

$x_6=0.6367$，　　$x_7=0.7586$，

试求它们的有限 W 变换。

【解】 采样序列是八个分量的向量，因而取 $n=3$，作$[W_{2^3}]=[W_8]$。

$$
\boldsymbol{y}=[W_8]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0000\\0.1002\\0.2013\\0.3045\\0.4108\\0.5211\\0.6367\\0.7586\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}0.0000+0.1002+0.2013+0.3045+0.4108+0.5211+0.6367+0.7586\\0.0000+0.1002+0.2013+0.3045-0.4108-0.5211-0.6367-0.7586\\0.0000+0.1002-0.2013-0.3045-0.4108-0.5211+0.6367+0.7586\\0.0000+0.1002-0.2013-0.3045+0.4108+0.5211-0.6367-0.7586\\0.0000-0.1002-0.2013+0.3045+0.4108-0.5211-0.6367+0.7586\\0.0000-0.1002-0.2013+0.3045-0.4108+0.5211+0.6367-0.7586\\0.0000-0.1002+0.2013-0.3045-0.4108+0.5211-0.6367+0.7586\\0.0000-0.1002+0.2013-0.3045+0.4108-0.5211+0.6367-0.7586\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.9332\\-1.7212\\0.0578\\-0.8690\\0.0146\\-0.0086\\0.0288\\-0.4356\end{bmatrix}
$$

例 2 设下列数据是某信号 $\boldsymbol{x}$ 的 W 变换，试求 $\boldsymbol{x}$。

$y_0=0.8881$，　$y_1=1.0271$，　$y_2=1.1752$，　$y_3=1.3363$，

$y_4=1.5094$，　$y_5=1.6985$，　$y_6=1.9046$，　$y_7=2.1297$。

【解】 因 $\boldsymbol{x}=[W_8]^{-1}\boldsymbol{y}=\frac{1}{8}[W_8]\boldsymbol{y}$

$$
=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0.8881\\ 1.0271\\ 1.1752\\ 1.3363\\ 1.5094\\ 1.6985\\ 1.9046\\ 2.1297
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}
0.8881+1.0271+1.1752+1.3363+1.5094+1.6985+1.9046+2.1297 \\
0.8881+1.0271+1.1752+1.3363-1.5094-1.6985-1.9046-2.1297 \\
0.8881+1.0271-1.1752-1.3363-1.5094-1.6985+1.9046+2.1297 \\
0.8881+1.0271-1.1752-1.3363+1.5094+1.6985-1.9046-2.1297 \\
0.8881-1.0271-1.1752+1.3363+1.5094-1.6985-1.9046+2.1297 \\
0.8881-1.0271-1.1752+1.3363-1.5094+1.6985+1.9046-2.1297 \\
0.8881-1.0271+1.1752-1.3363-1.5094+1.6985-1.9046+2.1297 \\
0.8881-1.0271+1.1752-1.3363+1.5094-1.6985+1.9046-2.1297
\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 11.6689 \\ -2.8155 \\ 0.2301 \\ -1.4227 \\ 0.0581 \\ -0.0139 \\ 0.1141 \\ -0.7143 \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} 1.4586 \\ -0.3519 \\ 0.0288 \\ -0.1778 \\ 0.0073 \\ -0.0017 \\ 0.0143 \\ -0.0893 \end{bmatrix}
$$

有限 W 变换中只包含加法与减法运算，相应地比 F 变换来得简单。特别，变换与逆变换矩阵只相差因子 $1/2^n$，因而给应用带来方便。在上述例子中，求 W 变换与逆变换都是采用矩阵乘法，施行加、减运算的总次数为 $N^2=8^2=64$。第五章中将设计快速算法，会减少运算次数，对 N 很大时将大大减少计算量。

显然，有限 W 变换算子 T_W 是线性算子：

$$T_W(\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y})=\alpha T_W \boldsymbol{x}+\beta T_W \boldsymbol{y},$$

这里 α, β 为常数，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 2^n 维向量。

§4 Hadamard 矩阵与 Hadamard 变换

对向量作有限 W 变换时要计算 $[W_{2^n}]\boldsymbol{x}$，但 W 矩阵 $[W_{2^n}]$ 的结构不如其等价类中的一种矩阵，即 Hadamard 矩阵（简称 H 矩阵）简单。这种 H 矩阵用 $[H_{2^n}]$ 表示，它有简单的递推关系，因而考虑快速算法时，人们常用 H 矩阵代替 W 矩阵，而相应地，快速 W 变换则代之以快速 H 变换。

H 矩阵可由归纳法定义如下：

$$[H_2]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$[H_{2^2}]=\left[\begin{array}{c|c} H_2 & H_2 \\ \hline H_2 & -H_2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

……

$$[H_{2^n}]=\left[\begin{array}{c|c} H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}} \\ \hline H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}} \end{array}\right], \tag{3.34}$$

这里 $n=1, 2, 3, \cdots$。

H 矩阵 $[H_{2^n}]$ 是 2^n 阶方阵，它可以经过适当的初等行变换化为$[W_{2^n}]$（这一点将在性质 4° 证明），例如，考察$[H_{2^2}]$。

$$[H_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{三、四行交换}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{二、四行交换}}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}=[W_4]。$$

H 矩阵具有下列性质。

性质 1° $[H_{2^n}]$ 是一个直交方阵。

事实上，下面性质 4° 将告诉我们 $[H_{2^n}]$ 可以通过 $[W_{2^n}]$ 作初等行变换而得到，而初等行变换不会改变行向量的直交性，故由 $[W_{2^n}]$ 为直交方阵而得出 $[H_{2^n}]$ 的直交性。

性质 2° $[H_{2^n}]$ 是对称方阵，且 $[H_{2^n}][H_{2^n}]^T=2^n[I]$。

这由 $[H_{2^n}]$ 的定义立即可得。

性质 3° $[H_{2^n}]$ 中的元素 h_{kj} 可表为

$$h_{kj}=(-1)^{\sum_{s=0}^{n-1}k_{-s}j_{-s}}, \tag{3.35}$$

其中 $k=(k_{-(n-1)}k_{-(n-2)}\cdots k_{-1}k_0)$，$j=(j_{-(n-1)}j_{-(n-2)}\cdots j_{-1}j_0)$是 k 与 j 的二进表示式，且 $k, j=0, 1, \cdots, 2^n-1$。

证 设 $[H_{2^n}]=[h_{kj}]$，$k, j=0, 1, \cdots, 2^n-1$。

我们用归纳法证明。当 $N=2^1$ 时，即 $n=1$，表示式(3.35)成立。因为

$$[H_{2^n}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{00} & h_{01}\\ h_{10} & h_{11}\end{bmatrix},$$

显然有

$$h_{kj}=(-1)^{k_{-1}j_{-1}+k_0j_0},\quad k,j=0,1_{\circ}$$

设 $N=2^n$ 时，(3.35)为真，由

$$[H_{2^{n+1}}]=\left[\begin{array}{c:c} H_{2^n} & H_{2^n}\\ \hdashline H_{2^n} & -H_{2^n}\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:ccc} h_{00} & \cdots & h_{0,2^n-1} & h_{0,2^n} & \cdots & h_{0,2^{n+1}-1}\\ \cdots & & & \cdots & & \\ h_{2^n-1,0} & \cdots & h_{2^n-1,2^n-1} & h_{2^n-1,2^n} & \cdots & h_{2^n-1,2^{n+1}-1}\\ \hdashline h_{2^n,0} & \cdots & h_{2^n,2^n-1} & h_{2^n,2^n} & \cdots & h_{2^n,2^{n+1}-1}\\ \cdots & & & \cdots & & \\ h_{2^{n+1},0} & \cdots & h_{2^{n+1}-1,2^n-1} & h_{2^{n+1},2^n} & \cdots & h_{2^{n+1}-1,2^{n+1}-1}\end{array}\right]$$

$$\equiv\left[\begin{array}{c:c} A & B\\ \hdashline C & D\end{array}\right],$$

易见，B 的元素与 A 的元素的第一个足标相同，第二个足标相差 2^n，C 的元素与 A 的元素的第一个足标相差 2^n，第二个足标相同，D 的元素与 A 的元素的两个足标都相差 2^n。于是有：

$$A=(h_{kj}),\qquad k,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1,$$

$$B=(h_{k,j+2^n}),\qquad k,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1,$$

$$C=(h_{k+2^n,j}),\qquad k,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1,$$

$$D=(h_{k+2^n,j+2^n}),\qquad k,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1_{\circ}$$

写出足标的二进代码，并约定 $k_{-n}=j_{-n}=0$,

$$k=(k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\,\cdots\,k_{-1}\,k_0),\ j=(j_{-(n-1)}\,j_{-(n-2)}\,\cdots\,j_{-1}\,j_0),$$

$$k+2^n=(1\,k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\,\cdots\,k_{-1}\,k_0),$$

$$j+2^n=(1\ j_{-(n-1)}\ j_{-(n-2)}\ \cdots\ j_{-1}\ j_0),$$

若令$k'=k+2^n=(k'_{-n}\,k'_{-(n-1)}\ \cdots\ k'_{-1}\,k'_0)$，则

$$k'_{-n}=1,\ k'_{-s}=k_{-s},\quad s=n-1,\ \cdots,\ 1,\ 0,$$

而令$j'=j+2^n=(j'_{-n}\ j'_{-(n-1)}\cdots\ j'_{-1}\ j_0)$，则

$$j'_{-n}=1,\ j'_{-s}=j_{-s},\ s=n-1,\ \cdots,\ 1,\ 0。$$

于是由递推关系$A=[H_{2^n}]$，$B=[H_{2^n}]$，$C=[H_{2^n}]$，$D=[-H_{2^n}]$得到

$$h_{k,j+2^n}=h_{k+2^n,j}=-h_{k+2^n,j+2^n}=h_{k,j},$$

从而有

$$\begin{aligned}h_{k,j'}&=h_{k,j+2^n}=h_{kj}=(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k_{-s}j_{-s}}\\&=(-1)^{k_{-n}j'_{-n}}\cdot(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k_{-s}j'_{-s}}=(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n}k_{-s}j'_{-s}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{k',j}&=h_{k+2^n,j}=h_{kj}=(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k_{-s}j_{-s}}\\&=(-1)^{k'_{-n}j_{-n}}\cdot(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k'_{-s}j_{-s}}=(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n}k'_{-s}j_{-s}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{k',j'}&=h_{k+2^n,j+2^n}=-h_{kj}=-(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k_{-s}j_{-s}}\\&=(-1)^{k'_{-n}j'_{-n}}\cdot(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n-1}k'_{-s}j'_{-s}}=(-1)^{\sum\limits_{s=0}^{n}k'_{-s}j'_{-s}},\end{aligned}$$

故(3.35)对$N=2^{n+1}$亦真。性质3°证毕。

现在转而讨论H矩阵与W矩阵的关系。任意固定一个自然数n，我们在同一个2^n维向量空间中来讨论。将H矩阵写成行向量排列：

$$[H_{2^n}]=\begin{bmatrix}h_0\\h_1\\\vdots\\h_{2^n-1}\end{bmatrix},\tag{3.36}$$

其中每个 h_k 为一个 2^n 维向量，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1$。

把 k 的二进代码

$$k=(k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\,\cdots\,k_{-1}\,k_0)$$

的各码字倒序，得 $(k_0\,k_{-1}\,\cdots\,k_{-(n-2)}\,k_{-(n-1)})$，并称它为 k 的反演，记为 $\overleftarrow{k}$，即

$$\overleftarrow{k}=(k_0\,k_{-1}\,\cdots\,k_{-(n-2)}\,k_{-(n-1)})。\tag{3.37}$$

我们有

性质 4° 在 H 矩阵的表示(3.36)中，第 $j+1$ 行向量 h_j 是 W 矩阵 $[W_{2^n}]$ 中这样的第 $k+1$ 个行向量 wal_k，使 j 是 k 的 Gray 码的反演，即 $j=\overleftarrow{G(k)}$。

证 只须证明向量 wal_k 经过 k 的 Gray 码并反演后所得的向量 $wal_k=(w_{ks})$ 就是 $h_j=(h_{\overleftarrow{G(k)},s})$，$k,\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1$。

由

$$G(k)=(k'_{-(n-1)}\,k'_{-(n-2)}\,\cdots\,k'_{-1}\,k'_0),$$

而
$$k'_{-(n-1)}=k_{-(n-1)},\ k'_{-(n-2)}=k_{-(n-1)}\oplus k_{-(n-2)},\ \cdots,$$
$$k'_0=k_{-1}\oplus k_0,$$

故 $\overleftarrow{G(k)}=(k_{-1}\oplus k_0\ k_{-2}\oplus k_{-1}\ \cdots\ k_{-(n-1)}\oplus k_{-(n-2)}\ k_{-(n-1)})$。

据 H 矩阵的性质 3°，得

$$h_{\overleftarrow{G(k)},s}$$
$$=(-1)^{(k_{-1}\oplus k_0)s_{-(n-1)}+(k_{-2}\oplus k_{-1})s_{-(n-2)}+\cdots+(k_{-(n-1)}\oplus k_{-(n-2)})s_{-1}+k_{-(n-1)}s_0},$$

但 wal_k 的第 s 个分量($s=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n-1$)为(见(3.21))

$$wal_k(s/2^n)=w_{ks}$$
$$=(-1)^{(k_{-1}\oplus k_0)s_{-(n-1)}+(k_{-2}\oplus k_{-1})s_{-(n-2)}+\cdots+(k_{-(n-1)}\oplus k_{-(n-2)})s_{-1}+k_{-(n-1)}s_0},$$

因此 wal_k 在 $[W_{2^n}]$ 中为第 $k+1$ 行，在 $[H_{2^n}]$ 中是第 $\overleftarrow{G(k)}+1$ 行的 $h_{\overleftarrow{G(k)}}$。

由性质 4° 可知，$[H_{2^n}]$ 与 $[W_{2^n}]$ 的不同之处仅在于它们

表 3.3

列率序	自然序	Hadamard 序 $h_j(x)$				
$wal_k(x)$	$w_i(x)$	$n=5$	$n=4$	$n=3$	$n=2$	$n=1$
wal_0	w_0	h_0	h_0	h_0	h_0	h_0
wal_1	w_1	h_{16}	h_8	h_4	h_2	h_1
wal_2	w_3	h_{24}	h_{12}	h_6	h_3	
wal_3	w_2	h_8	h_4	h_2	h_1	
wal_4	w_6	h_{12}	h_6	h_3		
wal_5	w_7	h_{28}	h_{14}	h_7		
wal_6	w_5	h_{20}	h_{10}	h_5		
wal_7	w_4	h_4	h_2	h_1		
wal_8	w_{12}	h_6	h_3			
wal_9	w_{13}	h_{22}	h_{11}			
wal_{10}	w_{15}	h_{30}	h_{15}			
wal_{11}	w_{14}	h_{14}	h_7			
wal_{12}	w_{10}	h_{10}	h_5			
wal_{13}	w_{11}	h_{26}	h_{13}			
wal_{14}	w_9	h_{18}	h_9			
wal_{15}	w_8	h_2	h_1			
wal_{16}	w_{24}	h_3				
wal_{17}	w_{25}	h_{19}				
wal_{18}	w_{27}	h_{27}				
wal_{19}	w_{26}	h_{11}				
wal_{20}	w_{30}	h_{15}				
wal_{21}	w_{31}	h_{31}				
wal_{22}	w_{29}	h_{21}				
wal_{23}	w_{28}	h_7				
wal_{24}	w_{20}	h_5				
wal_{25}	w_{21}	h_{21}				
wal_{26}	w_{23}	h_{29}				
wal_{27}	w_{22}	h_{13}				
wal_{28}	w_{18}	h_9				
wal_{29}	w_{19}	h_{25}				
wal_{30}	w_{17}	h_{17}				
wal_{31}	w_{16}	h_1				

的行向量所占的位置不一样，而每一个行向量仍是一个 W 函数。由 H 矩阵得到 W 函数的第三种排序，h_0，h_1，h_2，… 称为 Hadamard 序。

例 求 $[W_{2^5}]$ 中 wal_{19} 在 $[H_{2^5}]$ 中的位置。

【解】 由 $19=(1\ 0\ 0\ 1\ 1)$ 得 $G(19)=(1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ 与 $\overleftarrow{G(19)}=(0\ 1\ 0\ 1\ 1)=11$。

于是 $h_{11}=wal_{19}$，即 $[W_{2^5}]$ 中的第二十行的向量 wal_{19} 在 $[H_{2^5}]$ 中的位置是第十二行向量 h_{11}。

下面列出 W 系的首 2^n 个函数的列率序、自然序与 Hadamard 序的关系对照表。

设 $0\leqslant k, j, s\leqslant 2^n-1$，由(2.8)式与上面的性质 4°，对每个 n，函数 $wal_k(x)$，$w_s(x)$ 与 $h_j(x)$ 的序号 k，s，j 之间有关系

$$s=G(k),\ j=\overleftarrow{G(k)}$$

或写为
$$wal_k(x)=w_{G(k)}(x)=h_{\overleftarrow{G(k)}}(x)。$$

表 3.3 列出 $n=5$，4，3，2，1 情形的 W 系首 2^n 个函数三种不同排序的对照表。

下列表格给出列率序、自然序与 Hadamard 序（简称 H 序）W 函数的转换步骤。

已 知	欲 求	步 骤
列率序 $wal_k(x)$	自然序 $w_s(x)$	1. 写出 k 的二进代码 $k=(k_{-(n-1)}\ k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\ k_0)$ 2. 求出 k 的 Gray 码 $G(k)=(k'_{-(n-1)}\ k'_{-(n-2)}\ \cdots\ k'_{-1}\ k'_0)$ 3. 得自然序 $w_s(x)$ 的序号 $s=G(k)$

已 知	欲 求	步 骤
列率序 $wal_k(x)$	H 序 $h_j(x)$	1. 写出 k 的二进代码 $k=(k_{-(n-1)}k_{-(n-2)}\cdots k_{-1}k_0)$ 2. 求出 k 的 Gray 码 $G(k)=(k'_{-(n-1)}k'_{-(n-2)}\cdots k'_{-1}k'_0)$ 3. 把 $G(k)$ 反演 $\overleftarrow{G(k)}=(k'_0k'_{-1}\cdots k'_{-(n-2)}k'_{-(n-1)})$ 4. 得 H 序 $h_j(x)$ 的序号 $j=\overleftarrow{G(k)}$。
自然序 $w_s(x)$	H 序 $h_j(x)$	1. 写出 s 的二进代码 $s=(s_{-(n-1)}s_{-(n-2)}\cdots s_{-1}s_0)$ 2. 把 s 反演 $\overleftarrow{s}=(s_0s_{-1}\cdots s_{-(n-2)}s_{-(n-1)})$ 3. 得H序 $h_j(x)$ 的序号 $j=\overleftarrow{s}$。
	列率序 $wal_k(x)$	1. 写出 s 的二进代码 $s=(s_{-(n-1)}s_{-(n-2)}\cdots s_{-1}s_0)$ 2. 求出 s 的逆 Gray 码 $G^{-1}(s)=(s''_{-(n-1)}s''_{-(n-2)}\cdots s''_{-1}s''_0)$ 3. 得列率序 $wal_k(x)$ 的序号 $k=G^{-1}(s)$
H 序 $h_j(x)$	列率序 $wal_k(x)$	1. 写出 j 的二进代码 $j=(j_{-(n-1)}j_{-(n-2)}\cdots j_{-1}j_0)$ 2. 把 j 反演 $\overleftarrow{j}=(j_0j_{-1}\cdots j_{-(n-2)}j_{-(n-1)})$ 3. 求 $\overleftarrow{j}$ 的逆 Gray 码 $G^{-1}(\overleftarrow{j})=(j''_0j''_{-1}\cdots j''_{-(n-2)}j''_{-(n-1)})$ 4. 得列率序 $wal_k(x)$ 的序号 $k=G^{-1}(\overleftarrow{j})$
		1. 写出 j 的二进代码 2. 把 j 反演 $\overleftarrow{j}=(j_0j_{-1}\cdots j_{-(n-2)}j_{-(n-1)})$ 3. 得自然序 $w_s(x)$ 的序号 $s=\overleftarrow{j}$

有了H矩阵，可引入H变换。与W变换相类似，定义2^n维列向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

的H变换为

$$\boldsymbol{y}=[H_{2^n}]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0,2^n-1} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1,2^n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{2^n-1,0} & h_{2^n-1,1} & \cdots & h_{2^n-1,2^n-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}。\tag{3.38}$$

据H矩阵性质2°，可以得到H变换的反演公式：

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2^n}[H_{2^n}]\boldsymbol{y}。\tag{3.39}$$

利用H矩阵的递推公式作H变换是很方便的，这将在第五章中讨论。

对于本章§3的例1，欲求信号$\boldsymbol{x}$的W变换，也可以先求$\boldsymbol{x}$的H变换，再经过转换而得到$\boldsymbol{y}=[W_{2^n}]\boldsymbol{x}$。若记$[W_{2^n}]$到$[H_{2^n}]$的变换为$T_0$，即

$$[H_{2^n}]=T_0[W_{2^n}],$$

则

$$[W_{2^n}]=T_0^{-1}[H_{2^n}]。$$

T_0^{-1}的存在性将在第五章§1证明，这里只对本章§3中例1进行计算。

令 $\boldsymbol{z}=[H_{2^n}]\boldsymbol{x}$,

于是 $\boldsymbol{y}=T_0^{-1}\boldsymbol{z}$。

对于

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0.0000\\0.1002\\0.2013\\0.3045\\0.4108\\0.5211\\0.6367\\0.7586\end{bmatrix},$$

有
$$\boldsymbol{z}=[H_8]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2.9332\\-0.4356\\-0.8690\\0.0146\\-1.7212\\0.0288\\0.0578\\-0.0086\end{bmatrix}.$$

利用表 3.3，对 $\boldsymbol{y}=T_0^{-1}\boldsymbol{z}$ 知

$$z_0\longleftrightarrow y_0,\quad z_1\longleftrightarrow y_7,\quad z_2\longleftrightarrow y_3,\quad z_3\longleftrightarrow y_4,$$
$$z_4\longleftrightarrow y_1,\quad z_5\longleftrightarrow y_6,\quad z_6\longleftrightarrow y_2,\quad z_7\longleftrightarrow y_5,$$

故
$$\boldsymbol{y}=T_0^{-1}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}2.9332\\-1.7212\\0.0578\\-0.8690\\0.0146\\-0.0086\\0.0288\\-0.4356\end{bmatrix},$$

与本章§3例1结果一致。

§5 二进W矩阵

在制作W函数发生器的理论依据中，还需要用到另一种形式的W矩阵，称为二进W矩阵，记为$[\widetilde{W}_{2^n}]$。

$[\widetilde{W}_{2^n}]$是由$[W_{2^n}]$经下述变换得到的：

把$[W_{2^n}]$中的所有元素1换为0，所有元素-1换为1，并保持各元素的位置不变，得到的矩阵称为二进W矩阵$[\widetilde{W}_{2^n}]$。

若令$[W_{2^n}]=(a_{kj})$，$[\widetilde{W}_{2^n}]=(b_{kj})$，则

$$b_{kj}=\frac{1-a_{kj}}{2}, \quad a_{kj}, b_{kj}\in\{0, 1\}, \quad k, j=0, 1, \cdots, 2^n-1. \tag{3.40}$$

在上述变换下，$wal_k=(a_{k0}a_{k1}\cdots a_{k,2^n-1})$变为$\widetilde{wal}_k=(b_{k0}b_{k1}\cdots b_{k,2^n-1})$，$k=0, 1, \cdots, 2^n-1$。

相应地，称向量$\widetilde{wal}_k$为向量wal_k的二进向量

例 当$n=2$时，

$$[W_4]=\begin{bmatrix} wal_0 \\ wal_1 \\ wal_2 \\ wal_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

而相应地得到

$$[\widetilde{W}_4]=\begin{bmatrix} \widetilde{wal}_0 \\ \widetilde{wal}_1 \\ \widetilde{wal}_2 \\ \widetilde{wal}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

使用这种向量二进表示，可以把向量的直积化成二进制的伪加运算，对实际产生 W 函数带来方便。例如通过半加器就可实现伪加运算，从而获得以前由直积表示的 W 函数。

例 $wal_2=R_1R_2=(1\ 1\ -1\ -1)(1\ -1\ 1\ -1)$

$=(1\ -1\ -1\ 1)$,

$\widetilde{wal}_2=(0\ 1\ 1\ 0)$。

而 $\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2=(0\ 0\ 1\ 1)\oplus(0\ 1\ 0\ 1)=(0\ 1\ 1\ 0)$,

故 $\widetilde{wal}_2=\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2$。于是使用一个半加器立即可由 $\tilde{R}_1$ 与 $\tilde{R}_2$ 产生 $\widetilde{wal}_2$。

我们证明一般公式：

定理 若 $wal_k=R_{r_m}R_{r_{m-1}}\cdots R_{r_2}R_{r_1}$，则

$$\widetilde{wal}_k=\tilde{R}_{r_m}\oplus\tilde{R}_{r_{m-1}}\oplus\cdots\oplus\tilde{R}_{r_2}\oplus\tilde{R}_{r_1}。\tag{3.41}$$

证 分三步进行。

第一步 证明

$$\tilde{R}_j=(b_{0j}\,b_{1j}\ \cdots\ b_{2^n-1,j}),\quad j=0,1,\cdots,n,\tag{3.42}$$

其中 b_{rj} 是 r 的二进代码的第 j 位。

事实上，由(3.2)知

$$R_j=(R_{j0}\,R_{1j}\ \cdots\ R_{j,2^n-1}),\quad j=0,1,\cdots n。$$

而 $R_{0r}=1$, $R_{jr}=1-b_{rj}$, $j=1,\cdots,n$, $r=0,1,\cdots,2^n-1$。

故 $\tilde{R}_{0r}=0$, $r=0,1,\cdots,2^n-1$。

$$\tilde{R}_{jr}=\frac{1-(1-2b_{rj})}{2}=b_{rj},$$

$$j=1,2,\cdots,n;\ r=0,1,\cdots,2^n-1。$$

于是 $\tilde{R}_j=(b_{0j}\,b_{1j}\ \cdots\ b_{2^n-1,j})$, $j=0,1,\cdots,n$。

第二步 证明

$$\widetilde{R_jR_k}=\tilde{R}_j\oplus\tilde{R}_k,\quad j,k=0,1,\cdots,n,\tag{3.43}$$

这里 R_jR_k 是 R_j 与 R_k 的直积，而 $\widetilde{R_jR_k}$ 是直积 R_jR_k 的二进

表示。

事实上，有

$$R_jR_k=(R_{j0}\ R_{j1}\ \cdots\ R_{j,2^n-1})(R_{k0}\ R_{k1}\ \cdots\ R_{k,2^n-1})$$
$$=((1-2b_{sj})(1-2b_{sk})),\quad s=0,1,\cdots,2^n-1。$$

显然，当 b_{sj} 与 b_{sk} 相等时，有 $(1-2b_{sj})(1-2b_{sk})=1$，

当 b_{sj} 与 b_{sk} 不等时，有 $(1-2b_{sj})(1-2b_{sk})=-1$。因而 $\widetilde{R_jR_k}$ 的第 s 个分量

$$((1-2b_{sj})(1-2b_{sk}))^{\sim}=\begin{cases}0, & b_{sj}=b_{sk},\\ 1, & b_{sj}\neq b_{sk},\end{cases}$$

即 $\widetilde{R_jR_k}=(b_{sj}\oplus b_{sk})$，$s=0,1,\cdots,2^n-1$，$j,k=0,1,\cdots,n$。

由第一步知

$\tilde{R}_j=(b_{sj}),\tilde{R}_k=(b_{sk})$，$s=0,1,\cdots,2^n-1$，$j,k=0,1,\cdots n$，

故 $\tilde{R}_j\oplus\tilde{R}_k=(b_{sj}\oplus b_{sk})$，即(3.43)成立。

第三步　证明(3.41)。

由(3.8)知

$$wal_k=R_n^{k'_{-(n-1)}}\ R_{n-1}^{k'_{-(n-2)}}\cdots R_1^{k'_0},$$

k 与 k 的 Gray 码 $G(k)$ 由(3.5)，(3.6)给出。令

$$k'_{-r_m}=k'_{-r_{m-1}}=\cdots=k_{-r_1}=1,$$

其余 k'_{-s} 为 0，则 wal_k 中仅出现 R_{r_m}，$R_{r_{m-1}}$，$\cdots$，R_{r_2}，R_{r_1}，故

$$wal_k=R_{r_m}R_{r_{m-1}}\cdots R_{r_2}R_{r_1},$$

只须把第二步中的步骤推广到 m 次，便得

$$\widetilde{wal}_k=\tilde{R}_{r_m}\oplus\tilde{R}_{r_{m-1}}\oplus\cdots\oplus\tilde{R}_{r_2}\oplus\tilde{R}_{r_1}。$$

定理证毕。

据式(3.40)，可以由 W 矩阵 $[W_{2^n}]$ 得到二进 W 矩阵 $[\tilde{W}_{2^n}]$。

习　题

1．给出产生 W 函数的 Peterson 方法的证明。

2．试证公式(3.9)与(3.10)。

3．试证：R 函数 R_s 与某个改号 m 次的向量的直积是一个改号次数为 2^s-1-m 的向量。

4．矩阵 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$(B)=(b_{ij})$ 为 $p\times q$ 阶矩阵，它们的**张量积**定义为

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

其中每块 $a_{kj}B$ 均为 $p\times q$ 阶矩阵，而 $A\otimes B$ 则为 $mp\times nq$ 阶矩阵。

试举例说明张量积不满足交换律。但对 H 矩阵，却成立

$$[H_{2^m}]=[H_{2^{m-1}}]\ [H_2]=[H_2]\otimes[H_{2^{m-1}}]$$
$$=\underbrace{[H_2]\otimes[H_2]\otimes\cdots\otimes[H_2]}_{\text{共 } m \text{ 个}}.$$

5．试用归纳法证明 W 矩阵 $[W_{2^n}]$ 与 H 矩阵 $[H_{2^n}]$ 之间的关系：

$$wal_k\longleftrightarrow h_{\overleftarrow{G(k)}}。$$

6．对信号 $f(0), f(1), \cdots, f(7)$ 作有限 W 变换与有限 H 变换，并比较两种变换结果的异同。

7．利用题 5 证明 $[H_{2^n}]$ 中元素的 h_{kj} 的表示式(3.35)。

第 4 章

Walsh 系与三角系的比较

三角函数系与 Fourier 分析在理论与应用方面的重大作用是众所周知的，本章将把W系与三角系作一比较，使读者明了其间的异同，以便更好地掌握与应用它们。为了叙述上方便，我们将借用工程技术上的术语。这里所作的比较将围绕两个函数系的基本性质、频率与列率、谱分析、移位与卷积等方面进行。最后还将介绍逻辑导数与逻辑积分的概念，为进一步研究W分析打下基础。

§1 基本性质的比较

Fourier 级数与 Fourier 变换的理论在线性非时变系统中起着极其重要的作用。关于频率、频谱、振幅、位相、功率谱、调制、卷积等概念都是读者熟知的，它们的理论依据就是三角系的有关性质。在W系中有许多性质与三角系相类似，但两个系也各有其自身的特点。

大家知道，三角系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\},\qquad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{4.1}$$

在基本区间$[-\pi,\pi)$上是完整标准直交系。函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$，$\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$，$k=1,\ 2,\ \cdots$，在整个实轴上有定义，并且是以$2\pi$为周期的周期函数。

类似地，W系

$$\{1,\ wal_k(x)\},\quad k=1,\ 2,\ \cdots, \tag{4.2}$$

在基本区间[0，1)上是完整标准直交系。函数1，$wal_k(x)$，$k=1,2,\cdots$，在整个实轴上有定义，并且是以1为周期的周期函数。

此外，在基本区间$[-\pi,\pi)$上，函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$关于$[-\pi,\pi)$的中心点$x=0$是偶对称的，而函数$\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$关于$[-\pi,\pi)$的中心点$x=0$是奇对称的。就整个实轴而言，当$x\in(-\infty,\infty)$时，函数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$是偶函数，而$\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$是奇函数。

对W函数来说，在基本区间[0，1)上，函数1，$wal_{2k}(x)$关于[0，1)的中心点$x=\frac{1}{2}$是偶对称的，函数$wal_{2k-1}(x)$关于[0,1)的中心点$x=\frac{1}{2}$是奇对称的。在整个实轴上，除去一个可列点集外，函数1，$wal_{2k}(x)$是偶函数，而函数$wal_{2k-1}(x)$是奇函数。

由于三角系与W系有上述类似性，工程技术上常采用下列记号：

令

$$wal_{2k}(x)=\mathrm{cal}_k(x),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{4.3}$$

$$wal_{2k-1}(x)=\mathrm{sal}_k(x),\quad k=1,\ 2,\ \cdots, \tag{4.4}$$

于是W系$\{wal_k(x)\}$，$k=0,1,2,\cdots$也常写为

$$\{1,\ \mathrm{cal}_k(x),\ \mathrm{sal}_k(x)\},\quad k=1,\ 2,\ \cdots。$$

但必须指出，当$p>2$时，对p进W函数使用记号“cal”与“sal”是不恰当的(参考第四章§5)。

与三角系的乘法公式

$$2\cos mx\cos nx=\cos(m-n)x+\cos(m+n)x,$$

$$2\sin mx\cos nx=\sin(m-n)x+\sin(m+n)x,$$

$$2\sin mx\sin nx=\cos(m-n)x-\cos(m+n)x,$$

相呼应，在W系中成立如下乘法公式

$$\mathrm{cal}_m(x)\mathrm{cal}_n(x)=\mathrm{cal}_{m\oplus n}(x), \tag{4.5}$$

$$\mathrm{sal}_m(x)\mathrm{cal}_n(x)=\mathrm{sal}_{(m-1)\oplus n+1}(x), \tag{4.6}$$

$$\mathrm{sal}_m(x)\mathrm{sal}_n(x)=\mathrm{cal}_{(m-1)\oplus(n-1)}(x)。 \tag{4.7}$$

我们仅证明(4.5)，其余两个留作习题。

因为

$$\mathrm{cal}_m(x)\mathrm{cal}_n(x)=wal_{2m}(x)wal_{2n}(x)=wal_{2m\oplus 2n}(x);$$

而

$$\mathrm{cal}_{m\oplus n}(x)=wal_{2(m\oplus n)}(x),$$

故欲证(4.5)，只须证明

$$2m\oplus 2n=2(m\oplus n)。$$

为此设

$$m=(m_{-(r-1)}\ m_{-(r-2)}\ \cdots\ m_{-1}\ m_0),$$

$$n=(n_{-(r-1)}\ n_{-(r-2)}\ \cdots\ n_{-1}\ n_0),$$

若m与n的分量个数不同，则可补零使之成为同维数向量。显然有

$$2m=(m_{-(r-1)}\ m_{-(r-2)}\cdots m_{-1}\ m_0\ 0),$$

$$2n=(n_{-(r-1)}\ n_{-(r-2)}\cdots n_{-1}\ n_0\ 0),$$

从而

$$2m\oplus 2n$$

$$=(m_{-(r-1)}\oplus n_{-(r-1)}\ m_{-(r-2)}\oplus n_{-(r-2)}\ \cdots\ m_{-1}\oplus n_{-1}\ m_0\oplus n_0\ 0)。$$

但是

$$m\oplus n$$

$$=(m_{-(r-1)}\oplus n_{-(r-1)}\ m_{-(r-2)}\oplus n_{-(r-2)}\cdots m_{-1}\oplus n_{-1}\ m_0\oplus n_0),$$

所以

$2(m\oplus n)$

$$=(m_{-(r-1)}\oplus n_{-(r-1)}\ m_{-(r-2)}\oplus n_{-(r-2)}\cdots\ m_{-1}\oplus n_{-1}\ m_0\oplus n_0\ 0),$$

于是

$$2m\oplus 2n=2(m\oplus n)。$$

等式(4.5)证毕。

下面对于按三角系与W系的直交展开，提出几条常见的定理加以比较。象以前对于理论研究情形那样，这里的W函数采用自然序。

关于三角系，我们有

定理 1 设 f 是以 2π 为周期的平方可积函数，即$f\in L^2_{2\pi}$，则对它的 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

成立收敛关系

$$\lim_{r\to\infty}S_{n_r}(x)=f(x)\quad (\text{a.e.}),$$

其中序列n_r满足$n_{r+1}/n_r\geqslant\lambda>1$，而系数

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad k=1,2,\cdots。$$

相应地，在W系中有收敛定理（见第二章§4 定理 2.1)。

定理 2 设 f 是以 1 为周期的 L 可积函数，它的 W 级数的前 n 项部分和为

$$S_n(f;x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_jw_j(x),$$

则成立收敛关系

$$\lim_{r\to\infty}S_{2^r}(f;x)=f(x),\quad (\text{a.e.}),$$

其中

$$a_j=\int_0^1 f(x)w_j(x)dx,\quad j=0,1,2,\cdots。$$

上述两个收敛定理是关于级数部分和的一个子序列几乎处处收敛于给定的函数的。此外，两个系都有经典的 Dini-Lipschitz 判别法与 Jordan 判别法。而下面类似的收敛定理则包括这两个经典判别法为其特例。

定理 3 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，对 n 为奇数，令

$$T_n(x)=\sum_{j=0}^{(n-1)/2}\frac{1}{j+1}\left[f\left(x+\frac{2j\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{(2j+1)\pi}{n}\right)\right],$$

$$Q_n(x)=\sum_{j=0}^{(n-1)/2}\frac{1}{j+1}\left[f\left(x-\frac{2j\pi}{n}\right)-f\left(x-\frac{(2j+1)\pi}{n}\right)\right],$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(x)=0$ 对 $x\in[-\pi,\pi)$ 一致成立，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$$

关于 x 一致成立。

定理 4 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的 2 进连续函数，即

$$f(x\oplus h)-f(x)\to 0,\ 当\ h\to 0+\ 时,\ x\in[0,1),$$

令

$$U_n(x)=\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left[f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right],\qquad(4.8)$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)=0$ 对 $x\in[0,1)$ 一致成立，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f;x)=f(x)$$

关于 x 一致成立，其中 $S_n(f;x)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_jw_j(x)$，而

$$a_j=\int_0^1 f(x)w_j(x)dx,\quad j=0,1,2,\cdots。$$

我们来证明定理 4。由

$$S_k(f;x)-f(x)=\int_0^1 D_k(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt, \tag{4.9}$$

令 $k=2^n+k'$，而 $0\leqslant k'<2^n$。据 D 核的性质

$$D_k(t)=D_{2^n}(t)+w_{2^n}(t)D_{k'}(t)$$

与

$$D_{2^n}(t)=\begin{cases}2^n, & t\in[0,\ 2^{-n}),\\ 0, & t\in[2^{-n},\ 1),\end{cases}$$

以及

$$w_{2^n}(t)=\varphi_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[\dfrac{2j}{2^{n+1}},\ \dfrac{2j+1}{2^{n+1}}\right),\\ -1, & t\in\left[\dfrac{2j+1}{2^{n+1}},\ \dfrac{2j+2}{2^{n+1}}\right),\end{cases}$$

$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1,$$

于是

$$|S_k(f;x)-f(x)|\leqslant\left|\int_0^1 D_{2^n}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right| + \left|\int_0^1 w_{2^n}(t)D_{k'}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|,$$

记上述不等式右边第一项为 A，第二项为 B，下面来分别估计 A 与 B。

$$A=\left|\int_0^1 D_{2^n}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right| \leqslant 2^n\int_0^{1/2^n}\left|f(x\oplus t)-f(x)\right|dt\leqslant\omega\left(f;\frac{1}{2^n}\right),$$

这里 $\omega\left(f;\dfrac{1}{2^n}\right)=\sup\limits_{\substack{x\in[0,1)\\ |t|<1/2^n}}|f(x\oplus t)-f(x)|$ 为 $f(x)$ 的 2 进连续模。

$$B=\left|\int_0^1 w_{2^n}(t)D_{k'}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right|$$
$$=\left|\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{2j/2^{n+1}}^{(2j+1)/2^{n+1}}D_{k'}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{(2j+1)/2^{n+1}}^{(2j+2)/2^{n+1}} D_{k'}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]dt\Big|$$

$$=\Big|\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{2j/2^{n+1}}^{(2j+1)/2^{n+1}}\Big\{D_{k'}(t)[f(x\oplus t)-f(x)]$$

$$-D_{k'}\left(t+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left[f\left(x\oplus\left(t+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)-f(x)\right]\Big\}dt\Big|,$$

因 $k'<2^n$, $D_{k'}(t)=\sum\limits_{j=0}^{k'-1} w_j(t)$，故当 $t\in\left[\frac{2j}{2^{n+1}},\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)$时，

$$D_{k'}(t)=D_{k'}\left(t+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=D_{k'}\left(\frac{2j}{2^{n+1}}\right)=D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right),$$

于是

$$B\leqslant\Big|\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{2j/2^{n+1}}^{(2j+1)/2^{n+1}}\Big\{D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)\Big[f(x\oplus t)$$

$$-f\left(x\oplus\left(t+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\Big]\Big\}dt\Big|$$

$$=\Big|\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_0^{1/2^{n+1}} D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)\Big\{f\left(x\oplus\left(t+\frac{2j}{2^{n+1}}\right)\right)$$

$$-f\left(x\oplus\left(t+\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right)\Big\}dt\Big|$$

$$=\Big|\sum_{j=0}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)\Big\{f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)$$

$$-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\Big\}dt\Big|$$

$$\leqslant\Big|\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 D_{k'}(0)\left\{f\left(x\oplus\frac{t}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{t+1}{2^{n+1}}\right)\right\}dt\Big|$$

$$+\Big|\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)\Big\{f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)$$

$$-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\Big\}dt\Big|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}k'\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\Big|\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

$$\times\left\{f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}dt\Big|,$$

记上式右端第二项为 B_1，利用 $|D_k(u)|\leqslant\frac{2}{u}$，$u\in(0,1)$，便得 B_1 的估值

$$B_1=\left|\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 D_{k'}\left(\frac{j}{2^n}\right)\left\{f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}dt\right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{j}{2^n}\right)^{-1}\cdot 2\left|f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\right|$$

$$=\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left|f\left(x\oplus\frac{t+2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{t+2j+1}{2^{n+1}}\right)\right|。$$

注意到对每个 $t\in[0,1)$，在 $[0,1)$ 中存在 $\tilde{x}=\tilde{x}(t)$，使

$$x\oplus\frac{t+q}{2^{n+1}}=\tilde{x}\oplus\frac{q}{2^{n+1}}$$

对 $q=1,2,\cdots,2^{n+1}-1$ 成立，故

$$B_1\leqslant\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left|f\left(\tilde{x}\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(\tilde{x}\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right|\equiv U_n(\tilde{x}),$$

由假设条件 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)=0$ 对 $x\in[0,1)$ 一致成立，知

$$\lim_{n\to\infty}B_1(x)=0\quad 对\ x\in[0,1)\ 一致地成立，$$

又由 f 的 2 进连续性，知

$$\lim_{n\to\infty}\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)=0。$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}B=0\quad 对\ x\in[0,1)\ 一致成立。$$

由 $A\leqslant\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)$，也自然有

$$\lim_{n\to\infty}A=0。$$

因而定理证毕。

前面说过，Dini-Lipschitz 判别法与 Jordan 判别法为定理 4.3，4.4 的特例，我们仅就 W 函数情形叙述并证明它们。

推论 1 （Dini-Lipschitz 判别法） 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的 2 进连续函数，且 $\omega(f;\delta)=o\left(\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right),\delta\to 0$，则 $f(x)$ 的 W 级数的部分和一致收敛于 $f(x)$。

证 事实上，(4.8) 式中的 $U_n(x)$，在推论的假设条件下有估计

$$\begin{aligned}\left|U_n(x)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\,\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\cdot o((\ln 2^{n+1})^{-1}) \\ &= o((\ln 2^{n+1})^{-1})\cdot c\cdot\ln 2^n,\end{aligned}$$

这里 c 为常数（这是因为

$$\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}=\ln(2^n-1)+c_0+r_n,$$

c_0 是尤拉常数，$r_n\to 0(n\to\infty$ 时)），因此，$\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)=0$ 关于 $x\in[0,1)$ 是一致的，推论得证。

第二章 §5 定理 1 是本推论的特例。

推论 2 （Jordan 判别法） 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的 2 进连续函数，若 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上囿变，即 f 在 $[0,1)$ 上的总变分

$$\mathrm{Var}(f)=\sup\sum_{j=0}^{n-1}\left|f(x_{j+1})-f(x_j)\right|$$

是有限的，其中上确界是对任意分点组 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 而取的，则它的 W 级数的部分和一致收敛于 $f(x)$。

证 把 $U_n(x)$ 分为两部分

$$|U_n(x)|=\left|\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right|$$
$$=\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=m+1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right|,$$

这里选择这样的数列 $m=m(n)$，使得它满足

i) $m(n)$ 为自然数的增序列，且 $m(n)<2^n-1$；

ii) $m(n)\to\infty$，当 $n\to\infty$ 时；

iii) $\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)\ln m\to 0$，当 $n\to\infty$ 时，

读者不难了解，这样的序列 $m(n)$ 是容易选得的。

于是

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\oplus\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right|$$
$$\leqslant\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\leqslant c\omega\left(f;\frac{1}{2^{n+1}}\right)\ln m,$$

c 为常数；当 $n\to\infty$ 时，据 iii) 上式右边趋于 0。

另一方面，有

$$\left|\sum_{j=m+1}^{2^n-1}\frac{1}{j}\left\{f\left(x\oplus\frac{2j}{2^{n+1}}\right)-f\left(x\oplus\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right)\right\}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{m+1}\operatorname{Var}(f),$$

当 $n\to\infty$ 时，上式右边也趋于 0。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)=0$ 对 $x\in[0,1)$ 一致成立，推论得证。

作为本节的结束，我们叙述关于两个函数系的平均收敛定理，它们都是 Parseval 公式的直接推论。

定理 5 若 $f\in L^2_{[-\pi,\pi)}$，则 f 的 Fourier 级数的部分和序列 $S_n(x)$ 按 $L^2_{2\pi}$ 范数收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(x)-f(x)\|_2=0。$$

定理6 若 $f\in L^2_{[0,1)}$，则 f 的 W 级数的部分和序列按 $L^2_{[0,1)}$ 范数收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f;x)-f(x)\|_{L^2_{[0,1)}}=0。$$

本定理是第二章§5定理3的特殊情形，证明从略。

§2 频率与列率

三角系适用于描述简谐振动。

简谐振动的**频率**定义为单位时间内在基本区间上完成全振动的次数。频率的单位为赫芝(Hz)。如所周知，

$\cos kx$ 的频率为 k，　$k=0, 1, 2, \cdots$，

$\sin kx$ 的频率为 k，　$k=1, 2, \cdots$。

为了把频率的概念加以推广，我们把它理解为单位时间内简谐振动的运动轨迹在基本区间上改变符号的次数的一半。例如 $\cos kx$ 在 $x\in[-\pi, \pi)$ 上改变符号次数为 $2k$ 次，$\sin kx$ 也是如此。

借助于 W 函数可以描述非简谐振动的运动情况，与简谐振动的频率相应，可定义非简谐振动的列率。

非简谐振动的**列率**定义为单位时间内质点运动轨迹在基本区间上改变符号次数的一半。列率的单位为哈姆(Hm)。

由定义可得

$\mathrm{cal}_k(x)$ 的列率为 k，　$k=0, 1, 2, \cdots$，

$\mathrm{sal}_k(x)$ 的列率为 k，　$k=1, 2, \cdots$。

事实上，因为 $\mathrm{cal}_k(x)=wal_{2k}(x)$，而 $wal_{2k}(x)$ 在 $[0, 1)$ 上改变符号的次数为 $2k$ 次，故 $\mathrm{cal}_k(x)$ 的列率为 k。对于

$$\mathrm{sal}_k(x) = wal_{2k-1}(x),$$

虽然 $wal_{2k-1}(x)$ 在 $[0, 1)$ 上改变符号的次数为 $2k-1$，但因 $wal_{2k-1}(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $wal_{2k-1}(x)>0$，而 $x<0$ 时 $wal_{2k-1}(x)<0$，故经过 $x=0$ 时总要改变一次符号，于是在计算 $\mathrm{sal}_k(x)$ 的符号改变次数时，应当把穿越两个基本区间的连结点的那一次改号也算在内，所以 $\mathrm{sal}_k(x)$ 的列率也是 k。

此外，关于两个系的采样定理也很类似，我们叙述如下。

关于频率域的采样定理：频率 f 限制在 $0\leqslant f\leqslant 2\Delta f$，由 $\sin 2\pi ft$ 与 $\cos 2\pi ft$ 迭加所组成的信号，完全由每秒 $\frac{1}{2\Delta f}$ 个振幅（取样）所确定，其中 Δf 以频率的单位赫芝(Hz)计算。

关于列率域的采样定理：列率 φ 限制在 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\Delta\varphi$，由 $\mathrm{sal}_{\varphi T}(t/T)$ 与 $\mathrm{cal}_{\varphi T}(t/T)$ 迭加所组成的信号，完全由每秒 $\frac{1}{2\Delta\varphi}$ 个振幅（取样）所确定，其中 $\Delta\varphi$ 以列率的单位哈姆(Hm) 计算，T 为时基(时间单位)。

采样定理的证明要用到广义 W 函数与 W 变式(参看第六章)，故在此不拟讨论。

§3 振幅谱与功率谱

我们首先比较振幅谱。

在三角系中，以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的 Fourier 展式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

我们写出

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=A_n\sin(nx+\varphi_n),$$

其中 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\varphi_n=\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n}$，$n=0,\ 1,\ 2,\cdots$。

称 A_n 为 n 阶谐波的**振幅**，φ_n 为 n 阶谐波的**位相**，频率 n 与振幅 A_n 之间关系的图线称为 $f(x)$ 的**振幅谱**，频率 n 与位相 φ_n 之间关系的图线称为 $f(x)$ 的**位相谱**。

振幅谱所表示的是信号 $f(x)$ 在频率域中的波形。

在 W 系中，以 1 为周期的函数 $f(x)$ 的 W 展式为

$$a_c(0)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_c(n)\mathrm{cal}_n(x)+a_s(n)\mathrm{sal}_n(x)],$$

其中

$$a_c(n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{cal}_n(x)dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$a_s(n)=\int_0^1 f(x)\mathrm{sal}_n(x)dx,\quad n=1,\ 2\cdots.$$

由于在 W 系中没有类似于 (4.6) 的公式，因此无法直接作出 $f(x)$ 的振幅与位相，不过可以按照下面的方法进行考虑。

把 $a_c(n)\mathrm{cal}_n(x)$ 看作 $f(x)$ 的对称部分(偶函数部分)，而 $a_s(n)\mathrm{sal}_n(x)$ 看作 $f(x)$ 的反对称部分（奇函数部分)，并称列率 n 与 $a_c(n)$ 之间关系的图线为 $f(x)$ 的**对称部分谱**，而称列率 n 与 $a_s(n)$ 之间关系的图线为 $f(x)$ 的**反对称部分谱**。

通常也根据展式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a(n)wal_n(x),$$

这里 $a(n)=\int_0^1 f(x)wal_n(x)dx$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，

直接作出列率 n 与 $a(n)$ 之间的关系，称为 $f(x)$ 的 **Walsh 谱**。

作为例子，下面对周期为1的函数 $wal_1(x)$，$\sin 2\pi x$，$x(0\leqslant x<1)$ 作 Fourier 谱与 Walsh 谱（简称 F 谱与 W 谱）比较，最后一个函数是锯齿函数。

例1 作

$$f(x)=wal_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$$

的 F 谱与 W 谱。

以1为周期的函数 $f(x)$ 在基本区间 $[0,1)$ 上有展式

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2\pi nx+b_n\sin 2\pi nx),$$

这里

$$a_0=\int_0^1 f(x)dx,$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x\,dx,$$

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x\,dx,$$

于是，将 $f(x)=wal_1(x)$ 的 F 系数求出为

$$a_0=\int_0^{\frac{1}{2}}dx-\int_{\frac{1}{2}}^1 dx=0,$$

$$a_n=2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\cos 2n\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\cos 2n\pi x\,dx\right\}=0,$$

$$b_n=2\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\sin 2n\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1\sin 2n\pi x\,dx\right\}=\frac{2[(-1)^{n+1}+1]}{n\pi}。$$

所以对 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 得

$$A_0=0,A_n=\sqrt{b_n^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{(2k+1)\pi}, & \text{当 } n=2k+1,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\\ 0, & \text{当 } n=2k,\ k=1,\ 2,\ \cdots。\end{cases}$$

当 $f(x)=wal_1(x)$ 按 W 函数展开时，显然在展式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) wal_n(x)$$

中只有一项存在，即

$$a(1)=1,\ a(n)=0,\quad n=0,\ 2,\ 3,\ \cdots。$$

图 4.1 与 4.2 分别绘出了 $wal_1(x)$ 的 F 谱与 W 谱。

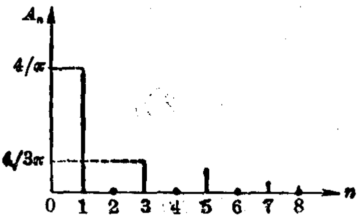


图 4.1

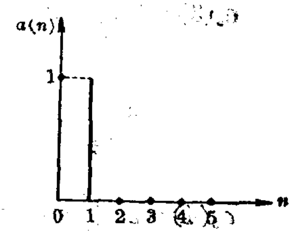


图 4.2

例 2 作出 $f(x)=\sin 2\pi x$ 的 F 谱与 W 谱。

$\sin 2\pi x$ 按三角系在 $[0,1)$ 上展开时，展式(4.7)的系数显然只有 $b_1=1$，其余全为 0。

但 $\sin 2\pi x$ 按 W 函数展开，展式

$$a_c(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_c(n)\mathrm{cal}_n(x)+a_s(n)\mathrm{sal}_n(x)\}$$

的系数中，却由 $\sin 2\pi x$ 与 $\mathrm{cal}_n(x)$、$\mathrm{sal}_n(x)$ 的周期与奇偶性得

$$a_c(n)=\int_0^1 \sin 2\pi x\ \mathrm{cal}_n(x)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi x\ \mathrm{cal}_n(x)dx=0,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$a_s(n)=\int_0^1 \sin 2\pi x\ \mathrm{sal}_n(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi x\ \mathrm{sal}_n(x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi x\ \mathrm{sal}_n(x)dx。$$

计算得

$$a_s(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi x\,dx=\frac{1}{\pi},$$

$$a_s(2)=2\left\{\int_0^{\frac{1}{4}}\sin 2\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi x\,dx\right\}=0,$$

$$a_s(3)=2\left\{\int_0^{\frac{1}{8}}\sin 2\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}}\sin 2\pi x\,dx+\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi x\,dx\right\}=\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{2}),$$

$$a_s(4)=2\left\{\int_0^{\frac{1}{8}}\sin 2\pi x\,dx-\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\sin 2\pi x\,dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}}\sin 2\pi x\,dx-\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi x\,dx\right\}=0,$$

……

$\sin 2\pi x$ 的 F 谱绘在图 4.3 中，反对称 W 谱绘在图 4.4 中。

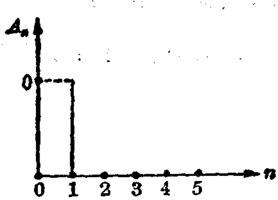


图 4.3

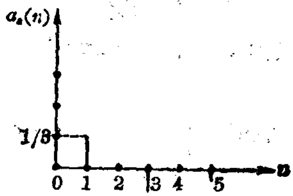


图 4.4

例 3 比较 $f(x)=x,\ 0<x\leqslant 1$ 的 F 谱与 W 谱。

解 把 $f(x)$ 按三角系展开，计算展式中的系数得

$$a_0=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2},$$

$$a_n = 2\int_0^1 x \cos 2n\pi x\, dx = 0,$$

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin 2n\pi x\, dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots。$$

于是 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{n\pi}$,

$$n = 1, 2, \cdots。$$

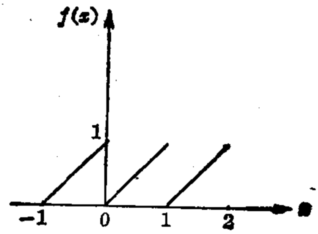


图 4.5

$f(x)$ 按 W 系的展式已由第二章§4例3给出

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} wal_{2^n-1}(x)。$$

所述函数的F谱与W谱绘在图4.6与4.7中。

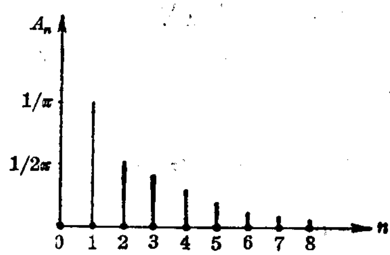


图 4.6

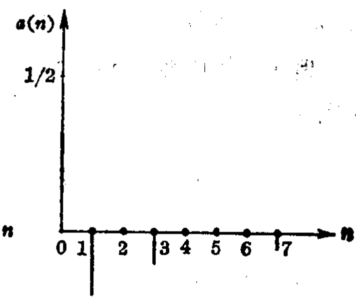


图 4.7

可见对锯齿形函数来说,它的W谱线只出现在$n=0, 1, 3, 7, 15, \cdots, 2^n-1, \cdots$,而$F$谱线在每个$n$都出现,比$W$谱线多得多。

关于功率谱,三角系与W系是极其类似的。

在三角系中,成立能量守恒的Parseval等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

$$f \in L^2_{[-\pi, \pi)}。$$

等式左边 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$ 表示信号 $f(x)$ 的平均能量(功率)，而右边各项 $\frac{|a_0|^2}{2}$, $|a_n|^2+|b_n|^2$ 分别表示直流分量与 n 阶谐波的平均能量，通常称 $|a_n|^2+|b_n|^2$ 的图线为 $f(x)$ 的功率谱图。

在 W 系中，同样成立能量守恒公式(参看(2.35)式)

$$\int_0^1 |f(x)|^2dx=|a_c(0)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\{|a_c(n)|^2+|a_s(n)|^2\},$$

$$f\in L^2_{[0,1)}。$$

量 $\int_0^1|f(x)|^2dx$ 表示信号 $f(x)$ 的平均能量，而 $|a_c(n)|^2+|a_s(n)|^2$, $n=0, 1, 2, \cdots$ 是第 n 个 W 波形的平均能量，我们称 $|a_c(n)|^2+|a_s(n)|^2$ 的图线为 $f(x)$ 的 W 功率谱。

例 4 作函数 $f(x)=x, x\in[0, 1)$ 的两种功率谱。由前面的例 3，知

$$a_n^2+b_n^2=\frac{1}{(n\pi)^2},\quad n=0, 1, 2, \cdots,$$

$$a_c^2(n)+a_s^2(n)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & n=0;\\ \frac{1}{2^{2n+2}}, & n=2^k-1, k=1, 2, \cdots。\end{cases}$$

图 4.8 与 4.9 分别绘出 $f(x)$ 的 F 功率谱与 W 功率谱。

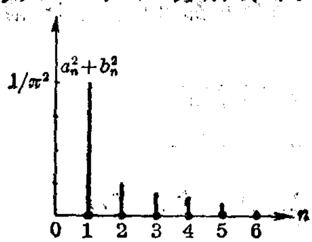


图 4.8

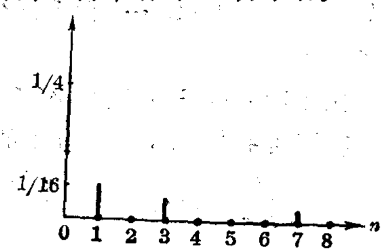


图 4.9

§4 循环移位与二进移位

三角系的循环移位对信号的随机采样有重要作用。

设 $N=2^n$，并给定一个信号的采样序列

$$\{x(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\},$$

令 m 为某个整数，$0<m\leqslant N-1$，从序列 $\{x(k)\}$ 出发，作一个新序列

$$\{y(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\},$$

其中

$$y(j)=\begin{cases}x(N+j-m), & j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,\\ x(j-m), & j=m,\ m+1,\ \cdots,\ N-1,\end{cases}$$

称 $\{y(k)\}$ 为 $\{x(k)\}$ 的 **m 循环移位**。

如果我们对信号序列 $\{x(k)\}$ 与它的 **m 循环移位**序列 $\{y(k)\}$ 分别进行离散 Fourier 变换，得

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)e^{-\frac{2\pi i}{N}jk}, \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1,\\ Y(k)&=\sum_{j=0}^{N-1}y(j)e^{-\frac{2\pi i}{N}jk}, \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1,\end{aligned} \tag{4.10}$$

则 $X(k)$ 与 $Y(k)$ 之间满足

$$Y(k)=e^{-\frac{2\pi i}{N}km}X(k), \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1. \tag{4.11}$$

它的证明留作习题。

若用记号 cs 表示循环移位，用 DFT 表示离散 Fourier 变换，那么由(4.11)式表示的性质可叙述为

定理 1 若信号序列 $\{x(k)\}$ 的 m 循环移位为 $\{y(k)\}$，而它们的离散 F 变换分别为 $\{X(k)\}$、$\{Y(k)\}$，也就是

$$\begin{array}{ccc}\{x(k)\} & \xrightarrow{\text{cs}} & \{y(k)\} \\ \downarrow \text{DFT} & & \downarrow \text{DFT} \\ \{X(k)\} & & \{Y(k)\},\end{array}$$

则 $\{X(k)\}$ 与 $\{Y(k)\}$ 的绝对值相同，位相之间有一个 m 移位（位相差），即

$$Y(k)=e^{-\frac{2\pi i}{N}km}X(m)。$$

定理 1 所描述的性质，称为离散 Fourier 变换对循环移位的不变性。

另一方面，离散 W 变换对循环移位不再保持定理 1 意义下的不变性，这对采样信号作 W 变换带来一定的困难。但是，离散 H 变换却对二进移位具有不变性（对离散 W 变换，情况相同）。

先引进二进移位的概念。

对信号采样序列 $\{x(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}$，与满足 $0<m\leqslant N-1$ 的整数 m，作一个新序列

$$\{z(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\},$$

其中

$$z(k)=x(k\oplus m),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1,\qquad (4.12)$$

称 $\{z(k)\}$ 为 $\{x(k)\}$ **关于 m 的二进移位**。

若对 $\{x(k)\}$ 与它关于 m 的二进移位 $\{y(k)\}$ 分别进行离散 H 变换，则成立下述二进移位的不变性。

定理 2 若序列

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{j=0}^{N-1}h_{kj}x(j),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1,\\ Z(k)&=\sum_{j=0}^{N-1}h_{kj}z(j),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1,\end{aligned}\qquad (4.13)$$

分别为信号序列 $\{x(k)\}$ 与 $\{z(k)\}$ 的离散 H 变换，其中 h_{kj} 是

H 矩阵 $[H_{2^n}]$ 的元素，且 $N=2^n$。此外，信号序列 $\{z(k)\}$ 是 $\{x(k)\}$ 关于 m 的循环移位，则 $X(k)$ 与 $Z(k)$ 之间满足

$$Z(k)=h_{km}X(k)。\tag{4.14}$$

象 Fourier 变换情形那样，若用记号 DS 表示二进移位，用 DHT 表示离散 H 变换，则上述性质可表示为：

若

$$\begin{array}{ccc} \{x(k)\} & \xrightarrow{\text{DS}} & \{z(k)\} \\ \big\downarrow \text{DHT} & & \big\downarrow \text{DHT} \\ \{X(k)\} & & \{Z(k)\}, \end{array}$$

则

$$Y(k)=h_{km}X(k)。$$

现在来证明定理 2。

利用第三章 § 4 中 H 矩阵的性质 3°，可得到 $[H_{2^n}]$ 中元素 h_{kj} 之间有下述关系

$$h_{kj}h_{km}=h_{k,j\oplus m}。\tag{4.15}$$

于是

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} h_{kj}z(j)=\sum_{j=0}^{N-1} h_{kj}x(j\oplus m) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h_{k,j\oplus m}}{h_{km}}x(j\oplus m)=\frac{1}{h_{km}}\sum_{j=0}^{N-1} h_{k,j\oplus m}x(j\oplus m) \\ &= \frac{1}{h_{k,m}}\sum_{s=0}^{N-1} h_{ks}x(s)=\frac{1}{h_{km}}X(k), \end{aligned}$$

但因 $h_{km}=1$ 或 -1，故 $\dfrac{1}{h_{km}}=h_{km}$。定理 2 证毕。

现在举例说明对信号列 $\{x(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 15\}$ 作循环移位与二进移位并对它们进行比较，设

$$x(0)=0.0873, \qquad x(1)=0.1745,$$
$$x(2)=0.2618, \qquad x(3)=0.3491,$$

$$x(4)=0.4363, \quad x(5)=0.5236,$$
$$x(6)=0.6109, \quad x(7)=0.6981,$$
$$x(8)=0.7854, \quad x(9)=0.8727,$$
$$x(10)=0.9599, \quad x(11)=1.0472,$$
$$x(12)=1.1345, \quad x(13)=1.2217,$$
$$x(14)=1.3090, \quad x(15)=1.3963,$$

取 $m=6$，求 $\{x(k)\}$ 的 m 循环移位 $\{y(j)\}$ 与二进移位 $\{z(k)\}$。

【解】 由 (4.9)，取 $N=16$，$m=6$，得 $\{x(k)\}$ 的 m 循环移位

$$y(0)=x(16+0-6)=x(10)=0.9599,$$
$$y(1)=x(16+1-6)=x(11)=1.0472,$$
$$y(2)=x(16+2-6)=x(12)=1.1345,$$
$$y(3)=x(16+3-6)=x(13)=1.2217,$$
$$y(4)=x(16+4-6)=x(14)=1.3090,$$
$$y(5)=x(16+5-6)=x(15)=1.3963,$$
$$y(6)=x(6-6)=x(0)=0.0873,$$
$$y(7)=x(7-6)=x(1)=0.1745,$$
$$y(8)=x(8-6)=x(2)=0.2618,$$
$$y(9)=x(9-6)=x(3)=0.3491,$$
$$y(10)=x(10-6)=x(4)=0.4363,$$
$$y(11)=x(11-6)=x(5)=0.5236,$$
$$y(12)=x(12-6)=x(6)=0.6109,$$
$$y(13)=x(13-6)=x(7)=0.6981,$$
$$y(14)=x(14-6)=x(8)=0.7854,$$
$$y(15)=x(15-6)=x(9)=0.8727.$$

写为向量形式，有

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0.9599\\1.0472\\1.1345\\1.2217\\1.3090\\1.3963\\0.0873\\0.1745\\0.2618\\0.3491\\0.4363\\0.5236\\0.6109\\0.6981\\0.7854\\0.8727\end{bmatrix}。
$$

显然，m 循环移位所得的序列是这样的，将原信号序列 $x(0)$，$x(1)$，…，$x(N-1)$ 的第 $N-1-m$ 位处截断，并保持位置次序地将 $x(0)\cdots x(N-1-m)$ 移至 $x(N-1)$ 之后。

由 (4.12)，取 $N=16$，$m=6$，得 $\{x(k)\}$ 的 m 二进移位

$$
\begin{aligned}
z(0)&=x(0\oplus 6)=x(6)=0.6109,\\
z(1)&=x(1\oplus 6)=x(7)=0.6981,\\
z(2)&=x(2\oplus 6)=x(4)=0.4363,\\
z(3)&=x(3\oplus 6)=x(5)=0.5236,\\
z(4)&=x(4\oplus 6)=x(2)=0.2618,\\
z(5)&=x(5\oplus 6)=x(3)=0.3491,\\
z(6)&=x(6\oplus 6)=x(0)=0.0873,
\end{aligned}
$$

$$z(7)=x(7\oplus 6)=x(1)=0.1745,$$
$$z(8)=x(8\oplus 6)=x(14)=1.3090,$$
$$z(9)=x(9\oplus 6)=x(15)=1.3963,$$
$$z(10)=x(10\oplus 6)=x(12)=1.1345,$$
$$z(11)=x(11\oplus 6)=x(13)=1.2217,$$
$$z(12)=x(12\oplus 6)=x(10)=0.9599,$$
$$z(13)=x(13\oplus 6)=x(11)=1.0472,$$
$$z(14)=x(14\oplus 6)=x(8)=0.7854,$$
$$z(15)=x(15\oplus 6)=x(9)=0.8727,$$

写为向量形式，有

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} 0.6109 \\ 0.6981 \\ 0.4363 \\ 0.5236 \\ 0.2618 \\ 0.3491 \\ 0.0873 \\ 0.1745 \\ 1.3090 \\ 1.3963 \\ 1.1345 \\ 1.2217 \\ 0.9599 \\ 1.0472 \\ 0.7854 \\ 0.8727 \end{bmatrix}。$$

这与循环移位的结果不同，它的次序已经不是截断与平移

关系，而是按照每个号码伪加 m 后一种新排列。我们绘出 $N=4$ 与 $N=8$ 时循环移位与二进移位的图示，以便读者进行比较。

当 $N=4$ 时，序列 $x(0)$，$x(1)$，$x(2)$，$x(3)$ 简单地记为 0，1，2，3。

图 4.10 表示 $m=0$，1，2，3 时序列的循环移位。

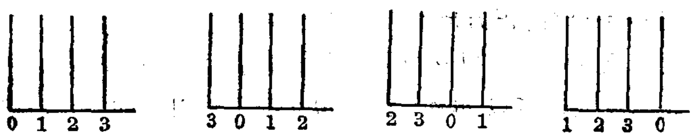


图 4.10

如果将上图中线段的头尾相接，可得四个正方形，每个正方形都可由第一个按逆时针向旋转得到，正是一种"循环"关系。

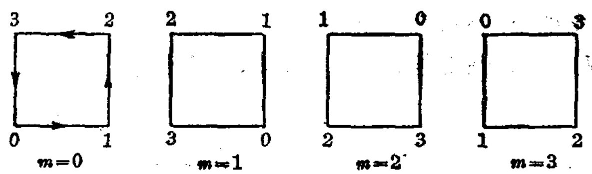


图 4.11

图 4.12 表示 $m=0$，1，2，3 时序列的二进移位，它与



图 4.12

图 4.10 迥然不同，不是截断与平移关系。如果也将上图中线段头尾相接，则得到下列四个正方形：

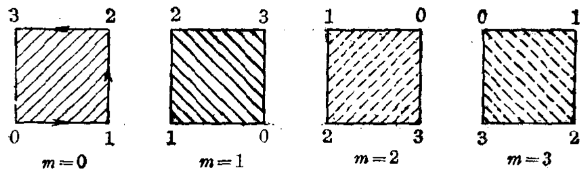


图 4.13

若把 $m=0$ 时的正方形看作书的一页，细线条表示正面，粗线条表示反面，那么，以 0 与 3 的连线为装订线翻阅时，$m=1$ 情形是其反面；若以 $m=1$ 情形中 0 与 1 的连线为装订线翻阅时，$m=2$ 情形是其反面；再以 $m=0$ 中 0 与 1 的连线为装订线翻阅时，$m=3$ 情形又恰是其反面。自然界中类似的现象很多，需要用二进移位表示，循环移位对这种关系就无法描述。

当 $N=8$ 时，序列 $x(0)$, $x(1)$, …, $x(7)$ 简记为 0, 1, …, 7。作图如下，不再加以解释。

循环移位情形绘在图 4.14 中，二进移位绘在图 4.15 中。

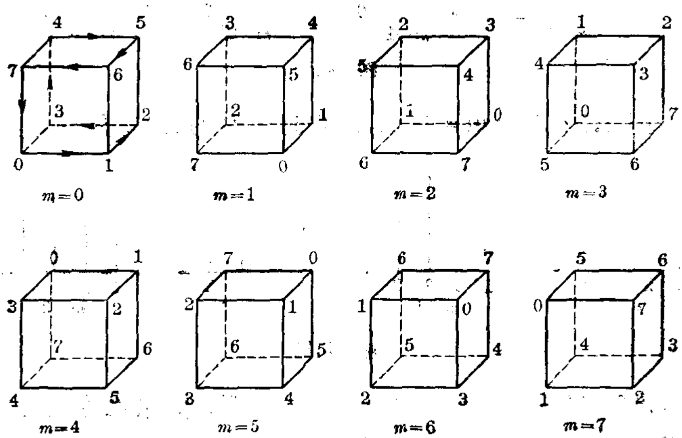


图 4.14

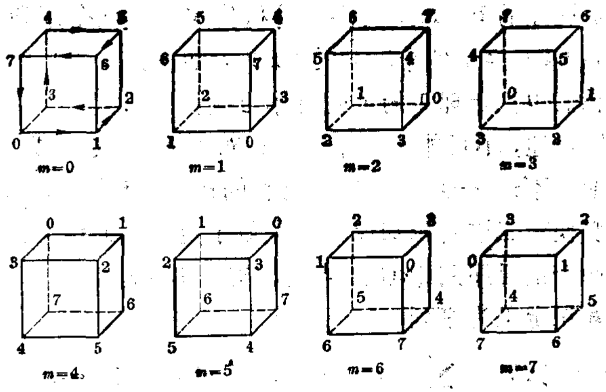


图 4.15

§5 循环卷积与二进卷积

读者熟知三角系的循环卷积及其性质。

两个信号序列

$$\{x(k),\ k=0,1,2,\cdots,N-1\},$$
$$\{y(k),\ k=0,1,2,\cdots,N-1\}$$

的**循环卷积**定义为序列

$$(x*y)(k)=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)y(k-j),\quad k=0,1,\cdots,N-1,\tag{4.16}$$

其中当 $k<j$ 时，$y(k-j)$ 代以 $y(N+k-j)$，并且 $N=2^n$。

离散 Fourier 变换对循环卷积成立下述性质。

定理 1 若信号序列 $\{x(k)\}$ 与 $\{y(k)\}$ 的离散 Fourier 变换分别为 $\{X(k)\}$ 与 $\{Y(k)\}$，而它们的循环卷积序列 $\{(x*y)(k)\}$ 的离散 Fourier 变换为 $\{Z(k)\}$，则

$$Z(k)=X(k)Y(k)。$$

这就是周知的 Fourier 变换的卷积公式，即两个序列的循环卷积的 DFT 等于各个序列的 DFT 的乘积。

我们也把定理 1 的证明留作习题。

同样地，不可能希望循环卷积对离散 W 变换成立定理 1 的结论。不过，一旦引入二进卷积的概念，人们立即发现，离散 H 变换对二进卷积却保持着类似于定理 1 的结果。

两个信号序列 $\{x(k)\}$ 与 $\{y(k)\}$, $k=0, 1, \cdots, N-1$, 的**二进卷积**定义为序列

$$(x \circledast y)(k)=\sum_{j=0}^{N-1} x(j) y(k \oplus j), \quad k=0, 1, \cdots, N-1。 \tag{4.17}$$

对离散 H 变换与二进卷积，成立

定理 2 若信号序列 $\{x(k)\}$ 与 $\{y(k)\}$ 的离散 H 变换分别为 $\{X(k)\}$ 与 $\{Y(k)\}$，而其二进卷积序列 $\{(x \circledast y)(k)\}$ 的离散 H 变换为 $\{Z(k)\}$，则有卷积公式

$$Z(k)=X(k) Y(k)。$$

证 由 H 变换的公式(4.13)与二进卷积的定义(4.17)得

$$\begin{aligned} Z(k) &=\sum_{j=0}^{N-1} h_{kj}(x \circledast y)(j)=\sum_{j=0}^{N-1} h_{kj} \sum_{s=0}^{N-1} x(s) y(j \oplus s) \\ &=\sum_{s=0}^{N-1} x(s) \sum_{j=0}^{N-1} h_{kj} y(j \oplus s)。\end{aligned}$$

另一方面，利用 H 矩阵元素间的关系(4.15)求得

$$\begin{aligned} X(k) Y(k) &=\left\{\sum_{s=0}^{N-1} h_{ks} x(s)\right\}\left\{\sum_{r=0}^{N-1} h_{kr} y(r)\right\} \\ &=\sum_{s=0}^{N-1} x(s) \sum_{r=0}^{N-1} h_{ks} h_{kr} y(r) \\ &=\sum_{s=0}^{N-1} x(s) \sum_{r=0}^{N-1} h_{k, s \oplus r} y(r), \end{aligned} \tag{4.18}$$

注意到 $N=2^n$，故当 $r=0, 1, \cdots, N-1$ 时，令 $j=s \oplus r$，由于

$s=0, 1, \cdots, N-1$，所以 j 也从 0 到 $N-1$ 取值，于是在和式 $\sum_{r=0}^{N-1} h_{k,s\oplus r}y(r)$ 中更换足码 $s\oplus r$ 为 j，则 $j\oplus s=s\oplus r\oplus s=r$，因此

$$\sum_{r=0}^{N-1} h_{k,s\oplus r}y(r)=\sum_{j=0}^{N-1} h_{kj}y(j\oplus s),$$

代入 (4.18)，便得

$$X(k)Y(k)=\sum_{s=0}^{N-1} x(s)\sum_{j=0}^{N-1} h_{kj}y(j\oplus s)。$$

故有

$$Z(k)=X(k)Y(k)。$$

定理证毕。

卷积定理无论在理论上还是在应用上都有重要意义。直接计算两个信号序列的卷积往往是不便的，因而应采用卷积定理进行计算。

例 用两种方法求信号序列 $\{x(k)\}$ 与 $\{y(k)\}$ 的二进卷积，其中 $x(k)$, $y(k)$, $k=0, 1, \cdots, 7$ 给出如下：

$x(0)=1.10194$, $x(1)=1.10526$, $x(2)=1.10856$,

$x(3)=1.11186$, $x(4)=1.11514$, $x(5)=1.11841$,

$x(6)=1.12168$, $x(7)=1.12493$;

$y(0)=0.309$, $y(1)=0.312$, $y(2)=0.315$,

$y(3)=0.317$, $y(4)=0.320$, $y(5)=0.323$,

$y(6)=0.326$, $y(7)=0.328$。

【解】 1) 直接由定义求 $(x\circledast y)(k)$：

$$\begin{aligned}(x\circledast y)(0)=\sum_{j=0}^{7} x(j)y(0\oplus j)&=x(0)y(0)+x(1)y(1)\\&+x(2)y(2)+x(3)y(3)+x(4)y(4)\\&+x(5)y(5)+x(6)y(6)+x(7)y(7)\\&=2.83974,\end{aligned}$$

$$(x \circledast y)(1) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(1 \oplus j) = x(0)y(1) + x(1)y(0)$$
$$+ x(2)y(3) + x(3)y(2) + x(4)y(5)$$
$$+ x(5)y(4) + x(6)y(7) + x(7)y(6)$$
$$= 2.83971,$$

$$(x \circledast y)(2) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(2 \oplus j) = x(0)y(2) + x(1)y(3)$$
$$+ x(2)y(0) + x(3)y(1) + x(4)y(6)$$
$$+ x(5)y(7) + x(6)y(4) + x(7)y(5)$$
$$= 2.83960,$$

$$(x \circledast y)(3) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(3 \oplus j) = x(0)y(3) + x(1)y(2)$$
$$+ x(2)y(1) + x(3)y(0) + x(4)y(7)$$
$$+ x(5)y(6) + x(6)y(5) + x(7)y(4)$$
$$= 2.83955,$$

$$(x \circledast y)(4) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(4 \oplus j) = x(0)y(4) + x(1)y(5)$$
$$+ x(2)y(6) + x(3)y(7) + x(4)y(0)$$
$$+ x(5)y(1) + x(6)y(2) + x(7)y(3)$$
$$= 2.83915,$$

$$(x \circledast y)(5) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(5 \oplus j) = x(0)y(5) + x(1)y(4)$$
$$+ x(2)y(7) + x(3)y(6) + x(4)y(1)$$
$$+ x(5)y(0) + x(6)y(3) + x(7)y(2)$$
$$= 2.83913,$$

$$(x \circledast y)(6) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(6 \oplus j) = x(0)y(6) + x(1)y(7)$$
$$+ x(2)y(4) + x(3)y(5) + x(4)y(2)$$
$$+ x(5)y(3) + x(6)y(0) + x(7)y(1)$$
$$= 2.83902,$$

$$(x \circledast y)(7) = \sum_{j=0}^{7} x(j)y(7 \oplus j) = x(0)y(7) + x(1)y(6)$$
$$+ x(2)y(5) + x(3)y(4) + x(4)y(3)$$
$$+ x(5)y(2) + x(6)y(1) + x(7)y(0)$$
$$= 2.83897。$$

写为向量形式，有

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 2.83974 \\ 2.83971 \\ 2.83960 \\ 2.83955 \\ 2.83915 \\ 2.83913 \\ 2.83902 \\ 2.83897 \end{bmatrix}。$$

2）利用卷积定理求 $(x*y)(k)$。

第一步 求 $\{x(k)\}$，$\{y(k)\}$的H变换 $\{X(k)\}$，$\{Y(k)\}$。

令

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(7) \end{bmatrix} = [H_8]\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y(1) \\ \vdots \\ Y(7) \end{bmatrix} = [H_8]\boldsymbol{y}.$$

于是由矩阵乘法即得

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}8.90778\\-0.01314\\-0.02628\\-0.00004\\-0.05254\\-0.00010\\-0.00016\\0.00000\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}2.550\\-0.010\\-0.022\\-0.002\\-0.044\\0.000\\0.000\\0.000\end{bmatrix}。$$

第二步 求 $Z(k)=X(k)Y(k)$。

令 $\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}Z(0)\\Z(1)\\\vdots\\Z(7)\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}Z(0)\\Z(1)\\Z(2)\\Z(3)\\Z(4)\\Z(5)\\Z(6)\\Z(7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22.71484\\0.00013\\0.00058\\0.00000\\0.00231\\0.00000\\0.00000\\0.00000\end{bmatrix}。$$

第三步 利用逆变换求 $(x\circledast y)(k)$。

由

$$\begin{bmatrix}(x\circledast y)(0)\\(x\circledast y)(1)\\\vdots\\(x\circledast y)(7)\end{bmatrix}=\frac{1}{8}[H_8]\boldsymbol{Z}$$

$$
=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\times\begin{bmatrix}
22.71484\\ 0.00013\\ 0.00058\\ 0.00000\\ 0.00231\\ 0.00000\\ 0.00000\\ 0.00000
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
2.83973\\ 2.83970\\ 2.83959\\ 2.83956\\ 2.83916\\ 2.83912\\ 2.83901\\ 2.83898
\end{bmatrix}。
$$

与法一相比较，仅在小数点后第五位上有1的误差（舍入误差）。由于H变换有快速算法，并且逆变换与H变换仅相差一常数因子，因而法二就方便得多。在工程技术上，欲求两个信号序列的卷积，常常采用这个方法。我们列出利用卷积定理求两个信号序列的卷积的步骤如下：

求$\{x(k)\}$与$\{y(k)\}$ $(k=0, 1, \cdots, N-1)$的卷积的步骤：

1．计算$\{x(k), k=0, 1, \cdots, N-1\}$与$\{y(k), k=0, 1, \cdots, N-1\}$的$H$变换$\{X(k), k=0, 1, \cdots, N-1\}$与$\{Y(k), k=0, 1, \cdots, N-1\}$。

2．计算

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(1) \\ \vdots \\ Z(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X(0)Y(0) \\ X(1)Y(1) \\ \vdots \\ X(N-1)Y(N-1) \end{bmatrix}。$$

3．求$\boldsymbol{Z}$的逆H变换

$$\left(H^{-1}=\frac{1}{2^n}[H_{2^n}]\right)\frac{1}{2^n}[H_{2^n}]\boldsymbol{Z}。$$

结果就是$\{(x \circledast y)(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1\}$。

在进行H变换时，要注意到二进卷积的下述两个性质，它们与F变换中循环卷积相类似。

第一，若设$\{X(k)\}$与$\{Y(k)\}$分别为$\{x(k)\}$与$\{y(k)\}$的H变换，用H^{-1}表示其逆变，即

$$\{X(k)\}\xrightarrow{H^{-1}}\{x(k)\}$$

与

$$\{Y(k)\}\xrightarrow{H^{-1}}\{y(k)\},$$

于是若对$\{X(k)\}$与$\{Y(k)\}$作卷积运算

$$Z(k)\equiv(X \circledast Y)(k)=\sum_{j=0}^{N-1}X(j)Y(k \oplus j),$$

那么，$\{Z(k)\}$的逆变换$\{z(k)\}$

$$\{Z(k)\}\xrightarrow{H^{-1}}\{z(k)\},$$

满足关系式

$$z(k)=2^n x(k)y(k)。\tag{4.19}$$

它的证明留作习题。

第二，如果我们定义长度$N=2^n$的信号序列$\{x(k)\}$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$，的**二进自相关函数**为

$$R_a(k)=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)x(k \oplus j),\tag{4.20}$$

亦即 $\{x(k)\}$ 与自身的二进卷积。

那么，若

$$\{x(k)\} \xrightarrow{\text{DHT}} \{X(k)\},$$

则 $\{x(k)\}$ 的离散功率谱 $P(k)=X^2(k)$，$k=0, 1, \cdots, N-1$，将满足变换关系

$$R_a(k) \xrightarrow{\text{DHT}} X^2(k)。$$

这可由二进卷积的性质立即得到。于是有：信号序列$\{x(k)\}$的二进自相关函数的离散H变换就是它的功率谱。

最后我们对第四章的§4与§5作一个共同的附注。

二进移位的不变性与二进卷积公式都是对离散H变换证明的。由于离散 W 变换(DWT)与 DHT 之间有如第三章§4性质 4° 所叙述的关系，不难将二进移位的不变性与二进卷积公式转移到 DWT 上去。读者可以自行验证。

§6　导数与逻辑导数

在 Fourier 级数的理论与应用中，常用基本区间$[-\pi, \pi)$上的完整直交系

$$\{e^{ikx}\},\quad k=0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

代替三角系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\},\quad k=1, 2, \cdots,$$

为了对三角系与 W 系作进一步比较，我们采用指数函数系$\{e^{ikx}\}$。

常微分方程教程中曾阐明，e^{ikx}，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$，是一阶常系数线性齐次常微分方程

$$y'=\lambda y \tag{4.21}$$

的固有函数。

如引言中所说，普通的微分运算施于 W 函数的结果是导数变为 0，因此显然不能指望 W 函数满足方程(4.21)。但是对 W 函数却可以进行一种称为逻辑微分的运算，并且有与指数函数系类似的结果。

定理 W 函数是一阶逻辑微分方程

$$\varphi^{\langle 1\rangle}=\lambda\varphi \tag{4.22}$$

的固有函数，这里 $\varphi^{\langle 1\rangle}$ 表示函数 φ 的逻辑导数，若右边级数收敛，则

$$\varphi^{\langle 1\rangle}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left\{\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2}\varphi(x\oplus 2^{-k-1})\right\}。 \tag{4.23}$$

为了进一步对 W 系进行讨论，并在更一般的情形下证明上述定理，我们就 p 进情形引入逻辑导数的概念。

回忆第一章§3 例 6 中的说明，p 进群 G 在所指的意义下与单位区间 $[0,1)$ 之间构成一种对应，因而粗略地说，G 与 $[0,1)$ 可视为同一的。因此，若无相反的声明，我们把 G 与 $[0,1)$ 视为同一进行研究。

现在定义 $G=[0,1)$ 上的实值或复值函数 $f(x)$ 的逻辑导数。

对整数 $p>1$，令复数 $A_j=A_j(p)$，$j=0, 1, \cdots, p-1$，由方程组

$$\sum_{j=0}^{p-1}A_j\omega^{kj}=k,\quad k=0, 1, 2, \cdots, p-1 \tag{4.24}$$

确定，其中 $\omega=\exp(2\pi i/p)$。

可以证明，满足(4.24)的复数 A_j 有表示式

$$\begin{aligned}&A_0(p)=(p-1)/2,\\&A_j(p)=\omega^j/(1-\omega^j),\quad j=1, 2, \cdots, p-1。\end{aligned} \tag{4.25}$$

考察 G 上的函数 $f(x)$，若对于一点 $x\in G$，和式

$$\sum_{k=0}^{N} p^k \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus j p^{-k-1}) \right\} \quad (4.26)$$

当 $N \to \infty$ 时收敛，则称极限值为 $f(x)$ 在点 x 的 p **进逻辑导数**，记为 $f^{\langle 1 \rangle}(x)$ 或 $(D^{\langle 1 \rangle} f)(x)$，即

$$f^{\langle 1 \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus j p^{-k-1}) \right\},$$

若视 x 在 G 上变动，便可以象通常那样定义逻辑导函数。

还可以考虑和式 (4.26) 按照某个函数空间的范数的极限。例如考虑函数空间 $L^2_{[0,1)}$，范数规定如常。对 $f \in L^2_{[0,1)}$，若当 $N \to \infty$ 时，(4.26) 依 $L^2_{[0,1)}$ 的范数收敛于同一空间的一个元，记成 $f^{\langle 1 \rangle}(x)|_{L^2[0,1)}$，则称之为 f **依 $L^2_{[0,1)}$ 意义的逻辑导数**. 用极限式表示，有

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \sum_{k=0}^{N} p^k \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus j p^{-k-1}) \right\} - f^{\langle 1 \rangle}(x) \right\|_2 = 0。$$

在不发生混淆时，把 $f^{\langle 1 \rangle}(x)|_{L^2[0,1)}$ 也简记为 $f^{\langle 1 \rangle}(x)$。

当 $p=2$ 时，可与 [3] 比较：由(4.25)求出

$$A_0(2) = 1/2, \quad A_1(2) = -1/2,$$

等式(4.26)成为

$$f^{\langle 1 \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left\{ \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(x \oplus 2^{-k-1}) \right\},$$

恰是(4.23)。可见 [3] 中讨论的逻辑导数是我们定义的逻辑导数的特殊情形。

下面证明由(2.43)定义的 p 进 W 函数

$$w_n(x) = exp\left(\frac{2\pi i}{p} (n \odot x) \right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

是一阶逻辑微分方程(4.22)的固有函数。

事实上，作和式

$$\sum_{k=0}^{N} p^k \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x \oplus j p^{-k-1}) \right\},$$

令

$$I_k \equiv \sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x \oplus jp^{-k-1}),$$

由 W 函数的乘法公式(2.18)得

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x \oplus jp^{-k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x) w_n(jp^{-k-1}) \\ &= w_n(x) \sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(jp^{-k-1}), \end{aligned}$$

但据(2.43)与(2.41)有

$$\begin{aligned} w_n(jp^{-k-1}) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(n \odot (jp^{-k-1}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p} jn_{-k}\right) = \omega^{jn_{-k}}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I_k &= w_n(x) \sum_{j=0}^{p-1} A_j \omega^{jn_{-k}} \\ &= w_n(x)\{A_0 + A_1\omega^{n_{-k}} + A_2\omega^{2n_{-k}} + \cdots + A_{p-1}\omega^{(p-1)n_{-k}}\} \\ &= w_n(x) \cdot n_{-k\circ} \end{aligned}$$

上式最后一步是据 A_j 所满足的方程组(4.24)得到的。于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} p^k \left\{\sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x \oplus jp^{-k-1})\right\} &= \sum_{k=0}^{N} w_n(x) n_{-k} p^k \\ &= w_n(x) \sum_{k=0}^{N} n_{-k} p^k, \end{aligned}$$

但由

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} n_{-k} p^k = \sum_{k=0}^{\infty} n_{-k} p^k = n$$

立即得出

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} p^k \left\{\sum_{j=0}^{p-1} A_j w_n(x \oplus jp^{-k-1})\right\} = n w_n(x),$$

从而 W 函数 $w_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 满足一阶逻辑微分方程(4.22)

$$(w_n(x))^{\langle 1\rangle}=nw_n(x)。$$

这正表明W函数是一阶逻辑微分方程(4.22)的固有函数。

至此我们对三角系与 W 系已作了初步的比较。读者不难看出，这两种函数系的类似性是有其实质原因的，那就是指数函数系与圆周紧群$[-\pi,\pi]$的特征群相对应，而 W 函数系则与 p 进紧群G的特征群相对应(第二章 § 3 和 § 6)。在圆周紧群 $[-\pi,\pi]$ 中，运算"+"就是普通的实数加法，而 p 进紧群 G 的运算却是伪加 $\oplus$。 如果我们把与圆周群有关的内容称为循环系统，而与 p 进群有关的内容称为 p 进系统(或逻辑系统)，那么指数函数系(因而三角函数系)与W函数系恰好分别构成两个系统的基础。

关于指数函数系与 W 函数系的进一步知识，读者可参看第六章。那里将讨论局部紧群 $G=[0,\infty)$ 上的 W 变式的一些性质及广义逻辑导数。

§ 7* 逻辑积分

上一节介绍的逻辑导数 $D^{\langle 1\rangle}f$ 是否也象普通导数那样有逆运算，即积分运算呢？答案是肯定的。

在第三章 § 3 中已定义过$p=2$时两个在$[0,1)$上L可积函数的逻辑卷积。这在任意整数$p\geqslant 2$情形是类似的。

对于整数 $p\geqslant 2$，设 $f\in L^q_{[0,1)}$，$q\geqslant 1$，与 $g\in L_{[0,1)}$，f 与 g 的**逻辑卷积** $f\circledast g$ 定义为

$$(f\circledast g)(x)=\int_0^1 f(x\ominus u)g(u)du。\qquad (4.27)$$

当 $q=1$, $p=2$ 时，就是第三章 § 3 中的定义(3.24)。

在第三章 § 3 定理 2 的证明中曾指出，对 $p=2$，当 f,

$g\in L_{[0,1)}$ 时，有 $f\circledast g\in L_{[0,1)}$。现在证明

定理 若 $f\in L^q_{[0,1)}$，$1\leqslant q<\infty$，$g\in L_{[0,1)}$，则 p 进卷积 $f\circledast g$ 属于 $L^q_{[0,1)}$，并且满足

$$\|f\circledast g\|_q\leqslant\|f\|_q\|g\|_1。$$

证 只须证明 $1<q<\infty$ 的情形。由 Hölder 不等式，并引进 q 的相伴数 $q'(1/q+1/q'=1)$，得

$$\begin{aligned}
|(f\circledast g)(x)| &= \left|\int_0^1 f(x\ominus u)g(u)du\right| \\
&\leqslant\int_0^1 |f(x\ominus u)||g(u)|du \\
&=\int_0^1 |f(x\ominus u)||g(u)|^{1/q}\cdot|g(u)|^{1/q'}du \\
&\leqslant\left\{\int_0^1 |f(x\ominus u|^q|g(u)|^{1/q\cdot q}du\right\}^{1/q} \\
&\quad\times\left\{\int_0^1 |g(u)|^{1/q'\cdot q'}du\right\}^{1/q'} \\
&=\left\{\int_0^1 |f(x\ominus u)|^q|g(u)|du\right\}^{1/q} \\
&\quad\times\left\{\int_0^1 |g(u)|du\right\}^{1/q'},
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\|f\circledast g\|_q &=\left\{\int_0^1 |(f\circledast g)(x)|^q dx\right\}^{1/q} \\
&\leqslant\left\{\int_0^1 |g(u)|du\right\}^{1/q'} \\
&\quad\times\left\{\int_0^1 dx\int_0^1 |f(x\ominus u)|^q|g(u)|du\right\}^{1/q} \\
&=\|g\|_1^{1/q'}\left\{\int_0^1 |g(u)|du\int_0^1 |f(x\ominus u)|^q dx\right\}^{1/q} \\
&=\|g\|_1^{1/q'}\|g\|_1^{1/q}\left\{\int_0^1 |f(x)|^q dx\right\}^{1/q} \\
&=\|g\|_1\|f\|_q。
\end{aligned}$$

这里用到

$$\int_0^1 |f(x\ominus u)|^q dx=\int_0^1 |f(x)|^q dx,$$

将在第六章给出证明(见(6.11)式)。定理证毕。

为定义逻辑积分，考察基本函数

$$W_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}w_k(x). \tag{4.28}$$

显然 W_1 的 W 变式为

$$W_1^{\wedge}(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ \dfrac{1}{k}, & k\neq 0.\end{cases} \tag{4.29}$$

我们将在 $G=[0,1)$ 上的函数空间 $X(G)$ 中考虑函数 $W_1(x)$ 的一些性质，这里 $X(G)$ 表示 G 上的连续函数空间 $C(G)$ 或 q 幂 $(1\leqslant q<\infty)$ L 可积函数空间，其上的范数定义为

$$\|f\|_C\equiv\|f\|_{C(G)}=\max_{x\in G}|f(x)|,$$

或

$$\|f\|_q=\|f\|_{L^q(G)}=\left\{\int_0^1 |f(x)|^q dx\right\}^{1/q}.$$

$W_1(x)$ 具有下列基本性质：

性质 1° $W_1(x)\in L(G)$。

性质 2° 若 $D^{\langle 1\rangle}f$ 存在，且 $D^{\langle 1\rangle}f\in X(G)$，$f^{\wedge}(0)=0$，则

$$W_1\circledast D^{\langle 1\rangle}f=f. \tag{4.30}$$

性质 3° 若 $f\in X(G)$，则

$$D^{\langle 1\rangle}(W_1\circledast f)=f. \tag{4.31}$$

证 为证 1°，我们引入函数

$$W_{1,m}(x)=1+\sum_{k=1}^{p^m-1}\frac{1}{k}w_k(x), \tag{4.32}$$

利用 Abel 求和公式(参看第一章 § 4(i))

$$\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \sum_{j=1}^{n-1} U_j (v_j - v_{j+1}) + U_n v_n,$$

这里 $U_k = \sum_{s=1}^{k} u_s$, 于是 $W_{1,m}(x)$ 可改写为

$$W_{1,m}(x) = \sum_{k=0}^{p^m-2} D_{k+1}(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + D_{p^m}(x)\frac{1}{p^m-1}, \tag{4.33}$$

其中 $D_k(x) = \sum_{s=0}^{k-1} w_k(x)$, (参看(2.25)), 并约定 $0^{-1}=1$。

取自然数 n, m, 使满足 $n>m$, 则

$$W_{1,n}(x) - W_{1,m}(x) = \sum_{k=p^m-1}^{p^n-2} D_{k+1}(x)\frac{1}{k(k+1)} + \frac{D_{p^n}(x)}{p^n-1} - \frac{D_{p^m}(x)}{p^m-1}。$$

因为由 D 核的性质[7]

$$\int_0^1 |D_{p^s}(x)|\,dx = 1, \quad \int_0^1 |D_s(x)|\,dx = 0(\log s), \quad s=1, 2, \cdots$$

故

$$\|W_{1,n} - W_{1,m}\|_1 = \int_0^1 |W_{1,n}(x) - W_{1,m}(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=p^m-1}^{p^n-2} \frac{\ln k}{k^2} + \frac{1}{p^n-1} + \frac{1}{p^m-1} \to 0,$$

当 $m, n\to\infty$ 时,

于是 $\{W_{1,m}(x)\}$ 是 $L(G)$ 中的基本序列,由 $L(G)$ 的完备性,知存在一个元 $g_1 \in L(G)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |W_{1,n}(x) - g_1(x)|\,dx = 0。$$

但由(4.34)与

$$|W_{1,n}^{\wedge}(k) - g_1^{\wedge}(k)| \leqslant \int_0^1 |W_{1,n}(x) - g_1(x)|\,dx,$$

并令 $n\to\infty$，便得到

$$g_1^{\wedge}(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ \dfrac{1}{k}, & k\neq 0。\end{cases}$$

这恰与(4.31)相同，因而由 W 变式的唯一性(第三章§3 定理 1) 有 $W_1(x)=g_1(x)$。从而 1° 证毕。

对于性质 2°，可先由 $D^{\langle 1\rangle}f\in X(G)$ 证明等式

$$(D^{\langle 1\rangle}f)^{\wedge}(m)=mf^{\wedge}(m),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots。\tag{4.34}$$

事实上，因

$$\left\|\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\}-(D^{\langle 1\rangle}f)(x)\right\|_{X(G)}\to 0,$$

$$N\to\infty$$

与

$$\left|\left[\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\}\right]^{\wedge}(m)-(D^{\langle 1\rangle}f)^{\wedge}(m)\right|$$
$$\leqslant\left\|\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\}-(D^{\langle 1\rangle}f)(x)\right\|_{X(G)},$$

有

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\}\right]^{\wedge}(m)$$
$$=(D^{\langle 1\rangle}f)^{\wedge}(m),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots。$$

但

$$\left[\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\}\right]^{\wedge}(m)$$
$$=\sum_{k=0}^{N}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf^{\wedge}(m)w_m(jp^{-k-1})\right\}$$
$$=f^{\wedge}(m)\sum_{k=0}^{N}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_j\omega^{m\odot jp^{-k-1}}=f^{\wedge}(m)\sum_{k=0}^{N}m_{-k}p^k,$$

当 $N\to\infty$ 时，极限为 $mf^{\wedge}(m)$，从而

$$(D^{\langle 1\rangle}f)^\wedge(m)=mf^\wedge(m),\quad m=0,1,2,\cdots。$$

就是(4.36)。

令 $D^{\langle 1\rangle}f=g$，(4.36) 化为

$$g^\wedge(m)=mf^\wedge(m)。$$

再由 $g\in X(G)$，$W_1\in L(G)$，知 $W_1\circledast g\in X(G)$。于是据 W 变式的卷积定理，求卷积得

$$(W_1\circledast g)^\wedge(m)=W_1^\wedge(m)g^\wedge(m)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\cdot mf^\wedge(m)=f^\wedge(m), & m\neq 0,\\ 1\cdot 0=0, & m=0。\end{cases}$$

这恰与 f 的 W 变式相等，据唯一性定理便得

$$f=W_1\circledast g=W_1\circledast(D^{\langle 1\rangle}f)。$$

性质 2° 证毕。

最后证明 3°。从恒等式

$$\sum_{s=0}^{m-1}p^s\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_j(W_1\circledast f)(x\oplus jp^{-s-1})\right\}-f(x)$$
$$=S_{p^m}(f;x)-f(x)+(f\circledast F_m)(x)\qquad(4.35)$$

出发，其中

$$F_m(x)=\sum_{s=0}^{m-1}p^s\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jW_1^{(m)}(x\oplus jp^{-s-1})\right\},$$

而 $W_1^{(m)}(x)$ 是这样的函数，它的 W 变式为

$$(W_1^{(m)})^\wedge(k)=\begin{cases}0, & 0\leqslant k<p^m,\\ \dfrac{1}{k}, & p^m\leqslant k<\infty\end{cases}\qquad(4.36)$$

恒等式(4.35)可由求等式两边的 W 变式，并利用变式的唯一性得到，我们把这个证明留作习题。

于是由(4.35)在 $X(G)$ 中取范数得

$$\left\|\sum_{s=0}^{m-1} p^s \left\{\sum_{j=0}^{p-1} A_j W({}_1 \circledast f)(x \oplus j p^{-s-1})\right\} - f(x)\right\|_{X(G)}$$

$$\leqslant \| S_{p^m}(f; x) - f(x) \|_{X(G)} + \| (f \circledast F_m)(x) \|_{X(G)}, \quad (4.37)$$

下面证明当 $m \to \infty$ 时，(4.39)右边的两项均趋于 0。

因为

$$S_{p^m}(f; x) - f(x) = \int_0^1 \{f(x \ominus t) - f(x)\} D_{p^m}(t) dt,$$

若 $X(G) = L^q(G)$，$1 \leqslant q < \infty$，利用广义 Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned}
&\| S_{p^m}(f; x) - f(x) \|_q \\
&= \left\{\int_0^1 \left| \int_0^1 [f(x \ominus t) - f(x)] D_{p^m}(t) dt \right|^q dx\right\}^{1/q} \\
&= \left\{\int_0^1 \left| \int_0^{1/p^m} [f(x \ominus t) - f(x)] \cdot p^m dt \right|^q dx\right\}^{1/q} \\
&\leqslant \int_0^{1/p^m} \| f(x \ominus t) - f(x) \|_q \cdot p^m dt \leqslant \omega(f; 1/p^m),
\end{aligned}$$

这里 $\omega(f; 1/p^m)$ 为 f 在 $L^q(G)$ 中的 p 进连续模(见第四章§1定理 4)：

$$\omega(f; 1/p^m) = \sup_{|t| < 1/p^m} \| f(\cdot \oplus t) - f(\cdot) \|_q;^{1)}$$

显然当 $m \to \infty$ 时，$\omega(f; 1/p^m) \to 0$。

若 $X(G) = C(G)$，同样有

$$\begin{aligned}
\| S_{p^m}(f; x) - f(x) \|_c &= \max_{x \in G} \left| \int_0^1 [f(x \ominus t) - f(x)] D_{p^m}(t) dt \right| \\
&\leqslant \max_{x \in G} \int_0^{1/p^m} | f(x \ominus t) - f(x) | D_{p^m}(t) dt \\
&\leqslant \omega(f; 1/p^m)。
\end{aligned}$$

故总有

$$\| S_{p^m}(f; \cdot) - f(\cdot) \|_{X(G)} \to 0, \quad m \to \infty。$$

---

1) 记号 $\| f(\cdot) \|_q$ 表示函数 $f(x)$ 依 L^q 意义的范数，· 表示函数的自变元。

至于(4.39)中第二项$\|(f\circledast F_m)(x)\|_{X(G)}$，引用$f$的$n$次最佳多项式$p_n$，得

$$\|f*F_m\|_{X(G)}\leqslant\|F_m\|_1\cdot\|f-p_n\|_{X(G)}+\|F_m*p_n\|_{X(G)},$$

不难看出

$$\|F_m\|_1\leqslant\sum_{s=0}^{m-1}p^s\left\{\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\,\|W_1^{(m)}\|_1\right\}$$
$$\leqslant\left\{\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\right\}\left\{\|W_1^{(m)}\|_1\sum_{s=0}^{m-1}p^s\right\},$$

由于$\|W_1^{(m)}\|_1=0(p^{-m})$（参看[3]）故

$$\|F_m\|_1\leqslant\left\{\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\right\}\cdot c\cdot p^{-m}\cdot\frac{1-p^{m-1}}{1-p}\leqslant M,\quad M\text{为常数。}$$

另一方面，

$$(F_m\circledast p_n)(x)=\int_0^1F_m(u)p_n(x\ominus u)du$$
$$=\int_0^1F_m(u)\sum_{r=0}^{n-1}a_rw_r(x\ominus u)du$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}a_rw_r(x)\int_0^1F_m(u)\overline{w}_r(u)du$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}a_rF_m^{\wedge}(r)w_r(x),$$

由$F_m(x)$的定义，知当m充分大时$F_m^{\wedge}(r)=0$，因此只要取m足够大，就能保证$\|F_m*p_n\|_{X(G)}=0$。因而性质3°证毕。

性质2°与3°表明卷积运算$W_1\circledast$与逻辑导数运算$D^{(1)}$互为逆运算。如果定义

$$I^{(1)}f(x)=(W_1\circledast f)(x)\qquad(4.38)$$

为f的逻辑积分，其中$W_1(x)$由(4.28)给出，则可把

$$I^{(1)}f=W_1\circledast f$$

视为一阶逻辑积分算子。高阶逻辑积分可用归纳法定义或借助于函数$W_r(x)$建立，这里

$$W_r(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}w_k(x),\quad r=2,3,\cdots。\tag{4.39}$$

可以证明,在一定的假设条件下,有

$$D^{(1)}(W_r ⊛ f)=f$$

与

$$W_r ⊛ D^{(1)}f=f。$$

因此 r 次逻辑积分可定义为

$$I^{(r)}f=W_r ⊛ f。\tag{4.40}$$

习 题

1. 试证乘法公式(4.6)与(4.7)。
2. 作函数

$$f_1(x)=\cos\pi x,\quad 0\leqslant x<1,$$

与
$$f_2(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\end{cases}$$

的 Fourier 谱与 Walsh 谱。

3. 试证 DFT 对循环移位的不变性。
4. 试证 DFT 对循环卷积的公式:循环卷积的 DFT 等于各个函数的 DFT 的乘积(定理 1)。
5. 任何三角多项式 (周期为 2π) 的 Fourier 级数是它自己。对于 W 级数,类似的论断是否成立?
6. 试将函数的 Fourier 级数与 W 级数的 $(c, 1)$ 求和进行比较。
7. 试对 p 进情形,讨论连续变量情形的卷积定理。
8. 试证恒等式(4.35)。
9. 试证系数 $A_0(P), A_1(P), \cdots, A_{p-1}(P)$ 的公式 (4.25)。

第 5 章

快速 Walsh 变换与 Walsh 函数的某些应用

快速 W 变换如快速 Fourier 变换一样，是对 W 变换设计一种算法，使节省原变换中重复运算，从而提高计算的速度。本章 §1 与 §2 介绍快速 W 变换(FWT)与快速 Hadamard 变换(FHT)。除了给出算法外，还给出它的证明。后一部分，即 §3 与 §4，介绍 W 函数的应用概况以及在多路复用、信号处理与数字电路中的某些应用，使读者对这方面有个初步的了解。

§1 W 变换与 H 变换的关系

考虑离散信号序列 $x_0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}$ 的 W 变换，由第三章 §3 知变换与逆变换可分别表示为

$$\boldsymbol{y}=[W_{2^n}]\boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

与

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2^n}[W_{2^n}]\boldsymbol{y}。 \tag{5.2}$$

我们的目的是要为 (5.1)、(5.2) 设计快速算法。因为如果按照矩阵乘法，$[W_{2^n}]\boldsymbol{x}$ 将要进行 $(2^n)^2$ 次加、减运算，当 n 很大时，即使使用量级很高的电子计算机，也要花费大量时间，这当然不符合科学实验与生产实践的要求。为此必须对

(5.1)与(5.2)设计新的算法。

由于$[W_{2^n}]$没有简明的递推公式，对设计算法来说是有一定困难的。但在第三章§4中已指出，与$[W_{2^n}]$等价的$[H_{2^n}]$，却有递推关系。只要对$[H_{2^n}]$有了快速算法，利用$[W_{2^n}]$与$[H_{2^n}]$的关系，便等于对信号序列的W变换给出了快速算法，下面来建立两种变换间的关系。

在第三章§4中已给出H变换及其逆变换的表示

$$\boldsymbol{y}=[H_{2^n}]\boldsymbol{x} \tag{5.3}$$

与

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2^n}[H_{2^n}]\boldsymbol{y}。 \tag{5.4}$$

此外，第三章§4性质4°中证明了$[W_{2^n}]$与$[H_{2^n}]$的关系可由反演的 Gray 码提供。若T_0表示这样的变换：把矩阵$A=[a_{ks}]$的第k行元素$(a_{k0}\ a_{k1}\ \cdots\ a_{k,N-1})$，$N=2^n$经初等行变换移到第$j$行，这里$j=G(\overleftarrow{k})$，$k=0, 1, \cdots, N-1$，所得矩阵记为$B=[b_{ks}]$，则有

$$B=T_0A。$$

显然T_0的逆变换T_0^{-1}是存在的：把矩阵B的第j行元素$(b_{j0}\ b_{j1}\ \cdots\ b_{jm})$经过行初等变换移到第$k$行，这里$k=G^{-1}(\overleftarrow{j})$，$j=0, 1, \cdots, N-1$。并且还可具体地写出$G^{-1}(\overleftarrow{k})$的表示式。

令 $$k=(k_{-(n-1)}\,k_{-(n-2)}\ \cdots\ k_{-1}\,k_0),$$

则 $$\overleftarrow{k}=(k_0\,k_{-1}\ \cdots\ k_{-(n-2)}\,k_{-(n-1)}),$$

$$G^{-1}(\overleftarrow{k})=$$

$$(k_0\oplus k_{-1}\oplus\cdots\oplus k_{-(n-1)}\ \ k_0\oplus k_{-1}\oplus\cdots\oplus k_{-(n-2)}\ \ k_0\oplus k_{-1}\ \ k_0)$$

(见(1.8))，这里记号$G^{-1}(j)$表示j的逆 Gray 码变换，即对$G^{-1}(j)$取 Gray 码时得j。

利用变换T_0，W矩阵与H矩阵的关系可表示为

$$[H_{2^n}]=T_0[W_{2^n}] \tag{5.5}$$

与

$$[W_{2^n}]=T_0^{-1}[H_{2^n}]。 \tag{5.6}$$

这样，若欲对离散信号 x 施以 W 变换，可利用

$$y=[W_{2^n}]x=\{T_0^{-1}[H_{2^n}]\}x=T_0^{-1}\{[H_{2^n}]x\}, \tag{5.7}$$

即先对 x 进行 H 变换，再作 $[H_{2^n}]x$ 关于 T_0 的逆变换便可达到预期目的。

此外，若先对 x 施以变换 T_0，然后对所得的新信号序列施以 H 变换，也可达到同样目的，即

$$y=[W_{2^n}]x=[H_{2^n}]\{T_0x\}。 \tag{5.8}$$

我们把(5.8)的证明留作习题。

由于 W 变换与 H 变换之间的上述关系，因而这里只对 H 变换讨论快速算法。下一节要给出快速 H 变换的一般步骤及其证明。现在以 $n=3$ 的情形为例对快速 H 变换方法加以说明。

设 $n=3$，于是离散信号列的长度为 $N=2^3=8$，H 矩阵也当为 8 阶方阵，即对离散信号列

$$x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_7$$

施以 $[H_8]$ 变换。把信号列写为列向量形式

$$x=\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{bmatrix},$$

x经过H变换后所得向量为y，

$$y=[H_8]x。$$

为设计快速算法，我们把$[H_8]$写为三个方阵之积

$$[H_8]=\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2 \\ & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

其中
$$H_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

而
$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 与 } I_4=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

分别为二阶与四阶单位方阵。(5.10)式中未写出字母的地方都是0。$[H_8]$的这种分解的证明放入第五章§2，作为一般情形的特例而得到。

据(5.10)，

$$y=[H_8]x=\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2 \\ & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}x$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & -1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & 1 & -1 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
1 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & \\
1 & & -1 & & & & & \\
 & 1 & & -1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & 1 & & -1 & \\
 & & & & & 1 & & -1
\end{bmatrix}
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 \\
1 & & & & -1 & & & \\
 & 1 & & & & -1 & & \\
 & & 1 & & & & -1 & \\
 & & & 1 & & & & -1
\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}。
$$

这样欲求 y，第一步先求 $\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} x$。因为

$$\begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 + x_7 \\ x_0 - x_4 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 - x_6 \\ x_3 - x_7 \end{bmatrix},$$

其结果就相当于把向量 $\boldsymbol{x}$ 分为两个向量

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix},$$

其中
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix},$$

然后施以 H_2 运算。如果定义

$$\boldsymbol{x}^1 = H_2\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1\\ \hdashline \boldsymbol{x}_2\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1\\ \hdashline \boldsymbol{x}_2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\\ \hdashline \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\end{array}\right],$$

则 $\begin{bmatrix}I_4 & I_4\\ I_4 & -I_4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ 就能表示为

$$\begin{bmatrix}I_4 & I_4\\ I_4 & -I_4\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = H_2\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_1\\ \hdashline \boldsymbol{x}_2\end{array}\right] = \boldsymbol{x}^1。$$

第二步是要对 $\boldsymbol{x}^1$ 施以 $\begin{bmatrix}I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2\\ & & I_2 & -I_2\end{bmatrix}$ 运算，

由于
$$\begin{bmatrix}I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2\\ & & I_2 & -I_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^1 = \begin{bmatrix}1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & 1\\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -1\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}x_0+x_4\\ x_1+x_5\\ x_2+x_6\\ x_3+x_7\\ x_0-x_4\\ x_1-x_5\\ x_2-x_6\\ x_3-x_7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0+x_4+x_2+x_6\\ x_1+x_5+x_3+x_7\\ x_0+x_4-x_2-x_6\\ x_1+x_5-x_3-x_7\\ x_0-x_4+x_2-x_6\\ x_1-x_5+x_3-x_7\\ x_0-x_4-x_2-x_6\\ x_1-x_5-x_3+x_7\end{bmatrix},$$

这一步结果相当于下述运算：把 $\boldsymbol{x}$ 分为四个向量

$$\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^1\\ \boldsymbol{x}_2^1\\ \hdashline \boldsymbol{x}_3^1\\ \boldsymbol{x}_4^1\end{bmatrix},$$

其中 $$\boldsymbol{x}_1^1=\begin{bmatrix}x_0+x_4\\ x_1+x_5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2^1=\begin{bmatrix}x_2+x_6\\ x_3+x_7\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3^1=\begin{bmatrix}x_0-x_4\\ x_1-x_5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_4^1=\begin{bmatrix}x_2-x_6\\ x_3+x_7\end{bmatrix},$$

并且把

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^1\\ \boldsymbol{x}_2^1\end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_3^1\\ \boldsymbol{x}_4^1\end{bmatrix}$$

看成两行一列矩阵 $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$ 的两个元素 b_1 与 b_2，则由张量积的定义（矩阵的张量积运算⊗见第三章习题 4），可以定义

$$\boldsymbol{x}^2\equiv H_2\otimes\boldsymbol{x}^1=H_2\otimes\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_2\ b_1\\ H_2\ b_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}H_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^1\\ \boldsymbol{x}_2^1\end{bmatrix}\\ \hdashline H_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_3^1\\ \boldsymbol{x}_4^1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^1+\boldsymbol{x}_2^1\\ \boldsymbol{x}_1^1-\boldsymbol{x}_2^1\\ \hdashline \boldsymbol{x}_3^1+\boldsymbol{x}_4^1\\ \boldsymbol{x}_3^1-\boldsymbol{x}_4^1\end{bmatrix},$$

那就恰有

$$\begin{bmatrix}I_2 & I_2 & & \\ I_2 & -I_2 & & \\ & & I_2 & I_2\\ & & I_2 & -I_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^1=\boldsymbol{x}^2=H_2\otimes\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix}H_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^1\\ \boldsymbol{x}_2^1\end{bmatrix}\\ \hdashline H_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_3^1\\ \boldsymbol{x}_4^1\end{bmatrix}\end{bmatrix}。$$

最后一步只要对 x^2 施以 $\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}$。由于

$$
\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{bmatrix} x^2
$$

$$
= \begin{bmatrix}
1 & 1 & & & & & & \\
1 & -1 & & & & & & \\
& & 1 & 1 & & & & \\
& & 1 & -1 & & & & \\
& & & & 1 & 1 & & \\
& & & & 1 & -1 & & \\
& & & & & & 1 & 1 \\
& & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_0 + x_4 + x_2 + x_6 \\
x_1 + x_5 + x_3 + x_7 \\
x_0 + x_4 - x_2 - x_6 \\
x_1 + x_5 - x_3 - x_7 \\
x_0 - x_4 + x_2 - x_6 \\
x_1 - x_5 + x_3 - x_7 \\
x_0 - x_4 - x_2 - x_6 \\
x_1 - x_5 - x_3 + x_7
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
x_0 + x_4 + x_2 + x_6 + x_1 + x_5 + x_3 + x_7 \\
x_0 + x_4 + x_2 + x_6 - x_1 - x_5 - x_3 - x_7 \\
x_0 + x_4 - x_2 - x_6 + x_1 + x_5 - x_3 - x_7 \\
x_0 + x_4 - x_2 - x_6 - x_1 - x_5 + x_3 + x_7 \\
x_0 - x_4 + x_2 - x_6 + x_1 - x_5 + x_3 - x_7 \\
x_0 - x_4 + x_2 - x_6 - x_1 + x_5 - x_3 + x_7 \\
x_0 - x_4 - x_2 + x_6 + x_1 - x_5 - x_3 + x_7 \\
x_0 - x_4 - x_2 + x_6 - x_1 + x_5 + x_3 - x_7
\end{bmatrix},
$$

同前面两步的方法一样，这一步也相当于把 x^2 分为八个分量

$$x^2=\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \\ x_7^2 \\ x_8^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= x_0+x_4+x_2+x_6, \\
x_2^2 &= x_1+x_5+x_3+x_7, \\
x_3^2 &= x_0+x_4-x_2-x_6, \\
x_4^2 &= x_1+x_5-x_3-x_7, \\
x_5^2 &= x_0-x_4+x_2-x_6, \\
x_6^2 &= x_1-x_5+x_3-x_7, \\
x_7^2 &= x_0-x_4-x_2+x_6, \\
x_8^2 &= x_1-x_5-x_3+x_7,
\end{aligned}$$

并且把

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_4^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_5^2 \\ x_6^2 \end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix} x_7^2 \\ x_8^2 \end{bmatrix}$$

看成四行一列矩阵

$$c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

的四个元素 c_1，c_2，c_3 与 c_4，则有

$$x^3 \equiv H_2 \otimes x^2 = H_2 \otimes \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 c_1 \\ H_2 c_2 \\ H_2 c_3 \\ H_2 c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_4^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_5^2 \\ x_6^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_7^2 \\ x_8^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \\ \hdashline x_3^2 + x_4^2 \\ x_3^2 - x_4^2 \\ \hdashline x_5^2 + x_6^2 \\ x_5^2 - x_6^2 \\ \hdashline x_7^2 + x_8^2 \\ x_7^2 - x_8^2 \end{bmatrix},$$

于是恰有

$$y = [H_8]\, x = \begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{bmatrix} x^2$$

$$= H_2 \otimes x^2 = \begin{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_4^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_5^2 \\ x_6^2 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_7^2 \\ x_8^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}。$$

据以上分析，可知对 x 施以 H 变换 $[H_3]$ 时，可代之以 $y = H_2 \otimes x^2 = H_2 \otimes (H_2 \otimes x^1) = H_2 \otimes [H_2 \otimes (H_2 x^0)]$。

因此，新算法可分为三步进行。

第一步，把 x 分为两个向量 $x^0=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，计算 $x^1=H_2x^0$，这一步共有八次运算，其中四次加法，四次减法。

第二步，把上一步计算所得的结果 x^1 分为四个向量

$$x^1=\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \hdashline x_3^1 \\ x_4^1 \end{bmatrix},$$

计算 $x^2=H_2\otimes x^1$，这一步也有八次运算，其中四次加法四次减法。

第三步，把第二步计算所得的结果 x^2 分为八个向量

$$x^2=\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \hdashline x_3^2 \\ x_4^2 \\ \hdashline x_5^2 \\ x_6^2 \\ \hdashline x_7^2 \\ x_8^2 \end{bmatrix},$$

计算 $y=x^3=H_2\otimes x^2$，也是四次加法与四次减法。

由此可见，按新算法求 $y=[H_8]x$，只要 $3\times 8=24$ 次运算，而直接作矩阵乘法则要 $8^2=64$ 次。

上述算法的流程图如图 5.1。其中实线箭头表示加法运算，把箭尾所指的两个量相加；虚线箭头表示减法运算，把箭尾所指上面的量减下面的量。

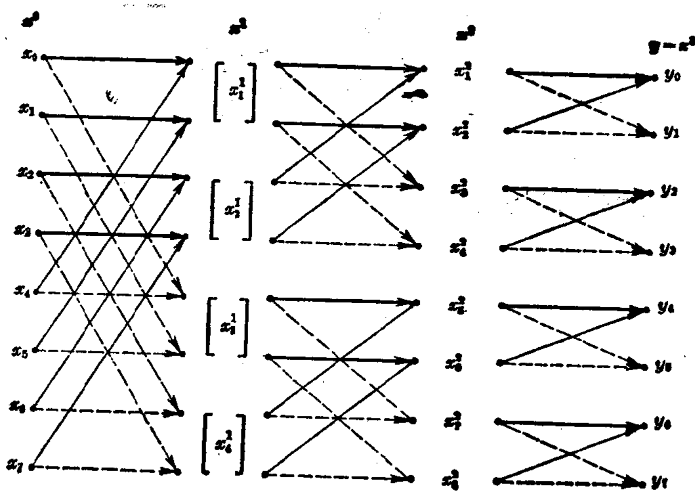


图 5.1

说明：例如 x^1 的第五个分量是 x_0-x_4，

x^2 的第六个分量是 $x_1-x_5+x_3-x_7$，

又如 x^3 的第二个分量是 $x_0+x_4+x_2+x_8-x_1-x_5-x_3-x_7$，

x^3 的第七个分量是 $x_0-x_4-x_2+x_8+x_1-x_5-x_3+x_7$。

在第四章 § 5 中，曾用矩阵乘法求向量

$$x=\begin{bmatrix}1.10194\\1.10526\\1.10856\\1.11186\\1.11514\\1.11841\\1.12168\\1.12493\end{bmatrix}$$

的H变换，那里共作了 64 次加减运算，现在用快速算法求

$$y=[H_{2^3}]x。$$

第一步，把x分为二个向量

$$x_1=\begin{bmatrix}1.10194\\1.10526\\1.10856\\1.11186\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}1.11514\\1.11841\\1.12168\\1.12493\end{bmatrix},$$

于是

$$x^1=H_2x=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.21708\\2.22367\\2.23024\\2.23679\\ \hdashline -0.01320\\-0.01315\\-0.01312\\-0.01307\end{bmatrix}。$$

第二步，把x^2分为四个向量

$$x_1^1=\begin{bmatrix}2.21708\\2.22367\end{bmatrix},$$

$$x_2^1=\begin{bmatrix}2.23024\\2.23679\end{bmatrix},$$

$$x_3^1=\begin{bmatrix}-0.01320\\-0.01315\end{bmatrix},$$

$$x_4^1=\begin{bmatrix}-0.01312\\-0.01307\end{bmatrix},$$

于是

$$
x^2 = H_2 \otimes x^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 + x_2^1 \\ x_1^1 - x_2^1 \\ \hdashline x_3^1 + x_4^1 \\ x_3^1 - x_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.44732 \\ 4.46046 \\ -0.01316 \\ -0.01312 \\ -0.02632 \\ -0.02622 \\ -0.00008 \\ -0.00008 \end{bmatrix}。
$$

第三步，把 x^2 分为八个向量

$$
\begin{aligned}
x_1^2 &= [4.44732], \\
x_2^2 &= [4.46046], \\
x_3^2 &= [-0.01316], \\
x_4^2 &= [-0.01312], \\
x_5^2 &= [-0.02632], \\
x_6^2 &= [-0.02622], \\
x_7^2 &= [-0.00008], \\
x_8^2 &= [-0.00008],
\end{aligned}
$$

于是

$$
y = H_2 \otimes x^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \\ x_3^2 + x_4^2 \\ x_3^2 - x_4^2 \\ \hdashline x_5^2 + x_6^2 \\ x_5^2 - x_6^2 \\ x_7^2 + x_8^2 \\ x_7^2 - x_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.90778 \\ -0.01314 \\ -0.02628 \\ -0.00004 \\ -0.05254 \\ -0.00010 \\ -0.00016 \\ 0.00000 \end{bmatrix}。
$$

如果用图 5.1 的形式写出计算的流程图，计算步骤更加清楚，这里从略。与第四章 § 5 的结果相比较，二者完全一致。但这里的运算次数只是 $3\times8=24$ 次。

§ 2　快速 H 变换 (FHT)

本节对 $N=2^n$ 的一般情形设计快速 H 变换的算法，这里 $n=1, 2, 3, \cdots$。

先把 FHT 算法的步骤列在下面：

1．设所给 2^n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix},$$

把 $\boldsymbol{x}$ 分为二个向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^{n-1}-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} x_{2^{n-1}} \\ x_{2^{n-1}+1} \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix},$$

每个向量的大小(指分量个数)为 $\boldsymbol{x}$ 的一半，即 2^{n-1}。

计算

$$H_2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

并记为 $\boldsymbol{x}^1$。

2．把 $\boldsymbol{x}^1$ 分为四个向量 $\boldsymbol{x}_1^1$，$\boldsymbol{x}_2^1$，$\boldsymbol{x}_3^1$，$\boldsymbol{x}_4^1$，每个向量的大小为 $\boldsymbol{x}$ 的 1/4，即 2^{n-2}。

计算

$$H_2 \otimes x^1 = H_2 \otimes \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 + x_2^1 \\ x_1^1 - x_2^1 \\ x_3^1 + x_4^1 \\ x_3^1 - x_4^1 \end{bmatrix}$$

并记为 x^2。

3. 重复上述步骤，假设第 k 步已经完成，结果为 x^k，则第 $k+1$ 步作法如下：

把 x^k 分为 2^{k+1} 个向量 x_1^k，x_2^k，…，$x_{2^{k+1}}^k$，每个向量的大小为 x 的 $1/2^{k+1}$，即 2^{n-k-1}。

计算

$$H_2 \otimes x^k = H_2 \otimes \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \hdashline x_3^k \\ x_4^k \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^{k+1}-1}^k \\ x_{2^{k+1}}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_{2^{k+1}-1}^k \\ x_{2^{k+1}}^k \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k + x_2^k \\ x_1^k - x_2^k \\ \hdashline x_3^k + x_4^k \\ x_3^k - x_4^k \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^{k+1}-1}^k + x_{2^{k+1}}^k \\ x_{2^{k+1}-1}^k - x_{2^{k+1}}^k \end{bmatrix},$$

并记为 x^{k+1}。

4．按上面步骤继续进行，直到第 n 步，把第 $n-1$ 步的结果 x^{n-1} 分为 2^n 个向量，每个大小是 x 的 $1/2^n$，即 1。

计算

$$
H_2 \otimes x^{n-1} = H_2 \otimes \left[\begin{array}{c} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} \\ x_{2^n}^{n-1} \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c} H_2 \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_{2^n-1}^{n-1} \\ x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix} \end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c} x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \\ x_1^{n-1} - x_2^{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} + x_{2^n}^{n-1} \\ x_{2^n-1}^{n-1} - x_{2^n}^{n-1} \end{array}\right],
$$

这就是所要求的结果 $y = [H_{2^n}]x$。

现在来证明上述 FHT 算法的正确性。

首先证明 H 矩阵 $[H_{2^n}]$ 可分解为 n 个方阵的乘积，而这 n 个方阵的每一行都只有两个非零元素。

记 I_p 为 p 阶单位方阵，则 $[H_{2^n}]$ 有如下分解

$$
[H_{2^n}] = \begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}_{2^{n-1}\text{个}}
\times \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & & & \\ I_2 & -I_2 & & & & \\ & & I_2 & I_2 & & \\ & & I_2 & -I_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_2 \quad I_2 \\ & & & & & I_2 \quad -I_2 \end{bmatrix}_{2^{n-2}\text{个}}
\times \begin{bmatrix} I_4 & I_4 & & & & \\ I_4 & -I_4 & & & & \\ & & I_4 & I_4 & & \\ & & I_4 & -I_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_4 \quad I_4 \\ & & & & & I_4 \quad -I_4 \end{bmatrix}_{2^{n-3}\text{个}} \cdots
\times \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} & & \\ I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} & & \\ & & I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} \\ & & I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} \end{bmatrix}
\times \begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -I_{2^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (5.11)
$$

证 用归纳法证明。

据矩阵的裂块乘法，可作下列运算：当 $n=2$ 时，有

$$[H_{2^2}]=\begin{bmatrix}H_2 & H_2\\ H_2 & -H_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_2 & \\ & H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2 & I_2\\ I_2 & -I_2\end{bmatrix},$$

因此(5.11)对 $n=2$ 成立。

现在假设 $n=k$ 时(5.11)成立，即

$$[H_{2^k}]=\begin{bmatrix}H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2\end{bmatrix}\ (2^{k-1}\text{个})$$

$$\times\begin{bmatrix}I_2 & I_2 & & & \\ I_2 & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & I_2\\ & & & I_2 & -I_2\end{bmatrix}\ (2^{k-2}\text{个})\cdots$$

$$\times\begin{bmatrix}I_{2^{k-2}} & I_{2^{k-2}} & & \\ I_{2^{k-2}} & -I_{2^{k-2}} & & \\ & & I_{2^{k-2}} & I_{2^{k-2}}\\ & & I_{2^{k-2}} & -I_{2^{k-2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}}\\ I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}}\end{bmatrix}。$$

共 k 个 2^k 阶方阵

利用矩阵乘法的如下性质

$$\begin{bmatrix}A_1A_2\cdots A_n & \\ & B_1B_2\cdots B_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & \\ & B_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_2 & \\ & B_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}A_n & \\ & B_n\end{bmatrix},\tag{5.12}$$

其中 A_j, B_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 都是同阶方阵。

于是由 $[H_{2^{k+1}}]$ 的递推关系与(5.12)，得

$$
\left[H_{2^{k+1}}\right]=\begin{bmatrix} H_{2^k} & H_{2^k} \\ H_{2^k} & -H_{2^k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{2^k} & \\ & H_{2^k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & -I_{2^k} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}}_{2^{k-1}\text{个}}\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & & \\ I_2 & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & I_2 \\ & & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}} \\ I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}} \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & & \\ I_2 & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & I_2 \\ & & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}} \\ I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
\times\begin{bmatrix} I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & -I_{2^k} \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}}_{2^{k}\text{个}}\underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & & \\ I_2 & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & I_2 \\ & & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}}_{2^{k-1}\text{个}}\cdots\begin{bmatrix} I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}} & & \\ I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}} & & \\ & & I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}} \\ & & I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & -I_{2^k} \end{bmatrix},
$$

共 $k+1$ 个 2^{k+1} 阶方阵

故(5.11)对 $n=k+1$ 也成立。

从而(5.11)对一切 n 成立。

注意到

$$\begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & \\ & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 & \\ & H_2 \end{bmatrix},$$

因此在上述证明中只要改换一下矩阵乘积的次序，就可得到(5.11)的另一种形式

$$[H_{2^n}] = \begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -I_{2^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} & & \\ I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} & & \\ & & I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} \\ & & I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} \end{bmatrix} \cdots$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} I_4 & I_4 & & & \\ I_4 & -I_4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_4 & I_4 \\ & & & I_4 & -I_4 \end{bmatrix}}_{2^{n-3}\text{个}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & & & \\ I_2 & -I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_2 & I_2 \\ & & & I_2 & -I_2 \end{bmatrix}}_{2^{n-2}\text{个}}$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix}}_{2^{n-1}\text{个}}。 \qquad (5.13)$$

根据(5.11)式，便可证明 FHT 的正确性。

考虑离散信号列 $x_0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}$，写为列向量

$$x=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{y}=[H_{2^n}]\boldsymbol{x}$。分为下列步骤进行。

第一步，把 $\boldsymbol{x}$ 分为二个向量

$$\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}^0=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix},$$

每个向量的大小(指分量个数)为 $2^n/2=2^{n-1}$，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^{n-1}-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} x_{2^{n-1}} \\ x_{2^{n-1}+1} \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix}。$$

我们定义 $\boldsymbol{x}^0$ 经过 H_2 变换后的结果为

$$\boldsymbol{x}^1=H_2\boldsymbol{x}^0=H_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix},$$

这相当于对 $\boldsymbol{x}$ 施以 $\begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -I_{2^{n-1}} \end{bmatrix}$，因为

$$\begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -I_{2^{n-1}} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} x_0+x_{2^{n-1}} \\ \vdots \\ x_{2^{n-1}-1}+x_{2^n-1} \\ \hdashline x_0-x_{2^{n-1}} \\ \vdots \\ x_{2^{n-1}-1}-x_{2^n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \\ \hdashline \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}。
$$

第二步，把 $\boldsymbol{x}$ 分为四个向量，每个大小为 $2^{n-1}/2=2^{n-2}$，即

$$
\boldsymbol{x}^1=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^1 \\ \boldsymbol{x}_2^1 \\ \boldsymbol{x}_3^1 \\ \boldsymbol{x}_4^1 \end{bmatrix},
$$

其中 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^1 \\ \boldsymbol{x}_2^1 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2]$，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_3^1 \\ \boldsymbol{x}_4^1 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2]$。

变换的第二步定义为

$$
\boldsymbol{x}^2=H_2\otimes\boldsymbol{x}^1=H_2\otimes\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^1 \\ \boldsymbol{x}_2^1 \\ \hdashline \boldsymbol{x}_3^1 \\ \boldsymbol{x}_4^1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} H_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^1 \\ \boldsymbol{x}_2^1 \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_3^1 \\ \boldsymbol{x}_4^1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^1+\boldsymbol{x}_2^1 \\ \boldsymbol{x}_1^1-\boldsymbol{x}_2^1 \\ \hdashline \boldsymbol{x}_3^1+\boldsymbol{x}_4^1 \\ \boldsymbol{x}_3^1-\boldsymbol{x}_4^1 \end{bmatrix},
$$

这恰相当于对 $\boldsymbol{x}^1$ 施以下述变换

$$
\begin{bmatrix}
I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} & & \\
I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} & & \\
& & I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} \\
& & I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}}
\end{bmatrix} x^1
$$

$$
=\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & & 1 & & & & & \\
& \ddots & & \ddots & & & & \\
& 1 & & 1 & & & & \\
1 & & -1 & & & & & \\
& \ddots & & \ddots & & & & \\
& 1 & & -1 & & & & \\
& & & & 1 & & 1 & \\
& & & & & \ddots & & \ddots \\
& & & & & 1 & & 1 \\
& & & & 1 & & -1 & \\
& & & & & \ddots & & \ddots \\
& & & & & 1 & & -1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1^1 \\ x_2^1 \\ \hdashline x_3^1 \\ x_4^1
\end{array}\right]
$$

$$
=\left[\begin{array}{c}
x_1^1+x_2^1 \\ x_1^1-x_2^1 \\ \hdashline x_3^1+x_4^1 \\ x_3^1-x_4^1
\end{array}\right]。
$$

重复上述步骤，假设第 k 步已经完成，结果为 x^k，则第 $k+1$ 步作法如下：

把 x^k 分为 2^{k+1} 个向量，每个大小为 2^{n-k-1}，

$$
x^k=\left[\begin{array}{c}
x_1^k \\ x_2^k \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^{k+1}-1}^k \\ x_{2^{k+1}}^k
\end{array}\right],
$$

变换的第 $k+1$ 步定义为

$$
x^{k+1}=H_2\otimes x^k=H_2\otimes\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \hdashline x_3^k \\ x_4^k \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^{n+1}-1}^k \\ x_{2^{n+1}}^k \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} H_2\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} \\ \hdashline H_2\begin{bmatrix} x_3^k \\ x_4^k \end{bmatrix} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline H_2\begin{bmatrix} x_{2^{n+1}-1}^k \\ x_{2^{n+1}}^k \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} x_1^k+x_2^k \\ x_1^k-x_2^k \\ \hdashline x_3^k+x_4^k \\ x_3^k-x_4^k \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^{n+1}-1}^k+x_{2^{n+1}}^k \\ x_{2^{n+1}-1}^k-x_{2^{n+1}}^k \end{bmatrix},
$$

这恰相当于对 x^k 进行如下变换

$$
\begin{bmatrix} I_{2^{n-k-1}} & I_{2^{n-k-1}} & & & \\ I_{2^{n-k-1}} & -I_{2^{n-k-1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_{2^{n-k-1}} & I_{2^{n-k-1}} \\ & & & I_{2^{n-k-1}} & -I_{2^{n-k-1}} \end{bmatrix} x^k
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & & & & & & \\
1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & & -1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & -1
\end{bmatrix} x^k
$$

$$
=\begin{bmatrix}
x_1^k + x_2^k \\
x_1^k - x_2^k \\
\hdashline
x_3^k + x_4^k \\
x_3^k - x_4^k \\
\hdashline
\vdots \\
\hdashline
x_{2^{k+1}-1}^k + x_{2^{k+1}}^k \\
x_{2^{k+1}-1}^k - x_{2^{k+1}}^k
\end{bmatrix}。
$$

如此继续下去,直到第 n 步,把 x^{n-1} 分为 2^n 个向量,每个大小为 $2^{n-n}=1$,

$$
x^{n-1}=\begin{bmatrix}
x_1^{n-1} \\
x_2^{n-1} \\
\vdots \\
x_{2^n-1}^{n-1} \\
x_{2^n}^{n-1}
\end{bmatrix},
$$

变换的第 n 步定义为

$$
y = x^n = H_2 \otimes x^{n-1} = H_2 \otimes \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} \\ x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline H_2 \begin{bmatrix} x_{2^n-1}^{n-1} \\ x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \\ x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} + x_{2^n}^{n-1} \\ x_{2^n-1}^{n-1} - x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix},
$$

这就相当于对 x^{n-1} 进行(5.11)中的第一个方阵的乘法

$$
\begin{bmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_2 \end{bmatrix} x^{n-1}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-2} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} \\ x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_1^{n-1} + x_2^{n-2} \\ x_1^{n-1} - x_2^{n-2} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{2^n-1}^{n-1} + x_{2^n}^{n-1} \\ x_{2^n-1}^{n-1} - x_{2^n}^{n-1} \end{bmatrix}。
$$

做完最后一步后，便得到经H变换的信号序列

$$\boldsymbol{y}=[H_{2^n}]\boldsymbol{x}=(\underbrace{H_2\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_2}_{\text{共}n\text{个}H_2})\boldsymbol{x},$$

这就证明了本节开始时所列快速算法步骤的正确性。

在上述算法中，易见每一步的运算次数都是$N=2^n$次，总共进行了n步，因此共需$n\times N=N\cdot\log_2 N$次。若直接计算$[H_{2^n}]\boldsymbol{x}$，则要N^2次。当N充分大时，快速方法的计算量便大大减少，这就是快速算法名称的来历。

与FFT相比较FHT与FFT两种算法的运算次数分别是$N\cdot\log_2 N$与$\frac{N}{2}\log_2 N$，但由于FFT要作乘法与复数运算，而FHT只须作加、减法运算，因此FHT又显得比FFT快(大约快三倍左右)。

近年来，虽然数字电子计算技术飞速地发展，计算机的量级不断提高，但却远远不能满足科学技术发展的要求。例如对卫星摄影作强化处理时，欲强化1厘米见方的底片，按间距1微米分格，则$N=10^8$。若作DFT运算，便需要10^{16}次。当使用每秒百万次量级的计算机时得算三个世纪。但FFT改进了DFT的算法，对同样的分格在同样量级的计算机上计算仅需一小时。当然采用FHT就更快了。可见算法的改进也起着极重要的作用。

下面给出应用FHT的例。

设有某信号的一组采样值

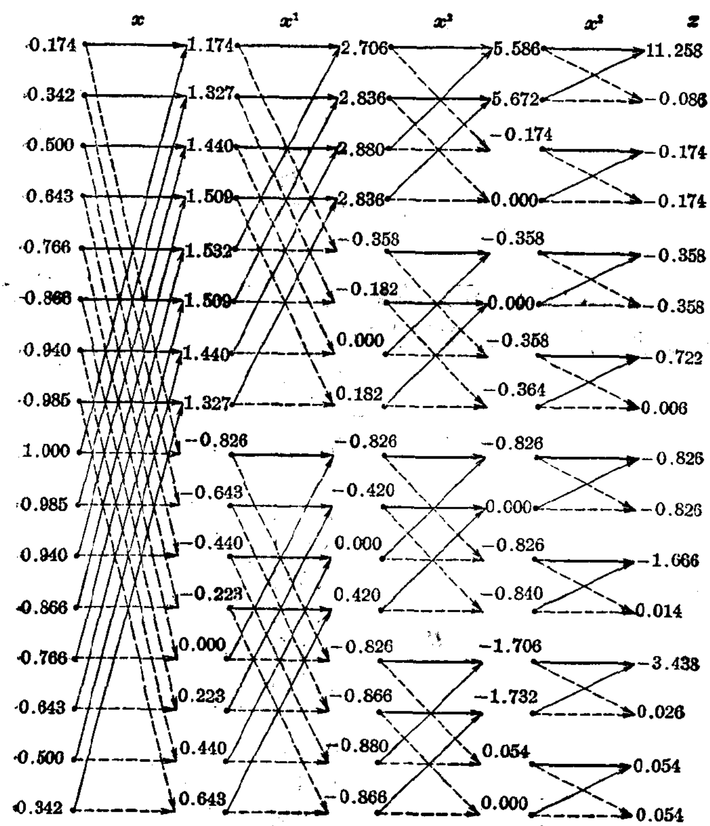
$$x_0=0.174,\quad x_1=0.342,\quad x_2=0.500,\quad x_3=0.643,$$
$$x_4=0.766,\quad x_5=0.866,\quad x_6=0.940,\quad x_7=0.985,$$
$$x_8=0.1000,\quad x_9=0.985,\quad x_{10}=0.940,\quad x_{11}=0.866,$$
$$x_{12}=0.766,\quad x_{13}=0.643,\quad x_{14}=0.500,\quad x_{15}=0.342.$$

试求它的有限 W 变换 $\boldsymbol{y}=[W_{24}]\boldsymbol{x}$。

由 $\boldsymbol{y}=[W_{24}]\boldsymbol{x}=\{T_0^{-1}[H_{24}]\}\boldsymbol{x}=T_0^{-1}\{[H_{24}]\boldsymbol{x}\}$，

我们先求 $\boldsymbol{z}=[H_{24}]\boldsymbol{x}$。

据 FHT 的算法作出流程图：



因而得

$$
\boldsymbol{z}=[H_{24}]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 11.258 \\ -0.086 \\ -0.174 \\ -0.174 \\ -0.358 \\ -0.358 \\ -0.722 \\ 0.006 \\ -0.826 \\ -0.826 \\ -1.666 \\ 0.014 \\ -3.438 \\ 0.026 \\ 0.054 \\ 0.054 \end{bmatrix}。
$$

为得到 $\boldsymbol{x}$ 的有限W变换 $\boldsymbol{y}$，只要对 $\boldsymbol{z}$ 施以 T_0^{-1}，亦即把 $\boldsymbol{z}$ 的分量次序按 $G^{-1}(\overleftarrow{k})$ 重新排列，便得

$$
\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 11.258 \\ -0.086 \\ -3.438 \\ -0.358 \\ -0.722 \\ 0.054 \\ -1.666 \\ -0.174 \\ -0.174 \\ 0.014 \\ 0.054 \\ 0.006 \\ -0.358 \\ 0.026 \\ -0.826 \\ -0.086 \end{bmatrix}。
$$

在理论研究中要用到自然序的W函数，而在工程技术上常用列率序的W函数，因而对序列$\{x(k), k=0, 1, \cdots, N-1\}$施以自然序$W$变换$[w]$与列率序$W$变换$[W_{2n}]$，两者都是有用的。快速算法是对$H$变换设计的，故可先对$\{x(k)\}$施以$H$变换，再利用表3.3，把所得的结果转换为自然序或列率序。

例1 设$\boldsymbol{x}$的采样值$\{x(k), k=0, 1, \cdots, 15\}$为

$$
\begin{aligned}
&x_0=22.33, &&x_1=21.88, &&x_2=20.42, &&x_3=18.96,\\
&x_4=17.50, &&x_5=16.04, &&x_6=15.75, &&x_7=14.88,\\
&x_8=14.00, &&x_9=13.13, &&x_{10}=12.25, &&x_{11}=11.38,\\
&x_{12}=10.50, &&x_{13}=9.63, &&x_{14}=8.75, &&x_{15}=7.88,
\end{aligned}
$$

试求$\{x(k)\}$的自然序W变换与列率序W变换。

【解】 第一步 求$\boldsymbol{x}$的H变换$\boldsymbol{z}=H\boldsymbol{x}$。

由快速算法立即得到

$$
\boldsymbol{z}=H\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}235.09\\7.91\\14.55\\-0.23\\33.61\\-0.61\\2.11\\-1.79\\60.83\\0.17\\1.33\\-1.01\\4.83\\0.17\\1.33\\-1.01\end{bmatrix}。
$$

第二步　求 $\boldsymbol{x}$ 的自然序 W 变换。

由表 3.3，知 H 序与自然序的关系如下：

$$0\longleftrightarrow 0,\quad 1\longleftrightarrow 8,\quad 2\longleftrightarrow 4,$$
$$3\longleftrightarrow 12,\quad 4\longleftrightarrow 2,\quad 5\longleftrightarrow 10,$$
$$6\longleftrightarrow 6,\quad 7\longleftrightarrow 14,\quad 8\longleftrightarrow 1,$$
$$9\longleftrightarrow 9,\quad 10\longleftrightarrow 5,\quad 11\longleftrightarrow 13,$$
$$12\longleftrightarrow 3,\quad 13\longleftrightarrow 11,$$
$$14\longleftrightarrow 7,\quad 15\longleftrightarrow 15。$$

如果记 $[w]\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{u}$，便得

$$\boldsymbol{u}=[w]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 235.09 \\ 60.83 \\ 33.61 \\ 4.83 \\ 14.55 \\ 1.33 \\ 2.11 \\ 1.33 \\ 7.91 \\ 0.17 \\ -0.61 \\ 0.17 \\ -0.23 \\ -1.01 \\ -1.79 \\ -1.01 \end{bmatrix}。$$

第三步　求 $\boldsymbol{x}$ 的列率序 W 变换。

由表 3.3，可得 H 序与列率序的关系（略），故得

$$
y=[W_{2^n}]x=\begin{bmatrix} 235.09 \\ 60.83 \\ 4.83 \\ 33.61 \\ 2.11 \\ 1.33 \\ 1.33 \\ 14.55 \\ -0.23 \\ -1.01 \\ -1.01 \\ -1.79 \\ -0.61 \\ 0.17 \\ 0.17 \\ 7.91 \end{bmatrix}。
$$

本节末尾再给出用 FHT 计算函数的 W 展式系数的例。

例 2 设 $f(x)=x^2$，$x\in[0, 1)$，取 $N=8$，计算 $f(x)$ 的 W 展式的首 8 个系数(取四位小数进行计算)。

【解】 把 $[0, 1)$ 分为八等分，分点为

$$
0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \cdots,\ \frac{7}{8},
$$

$f(x)$ 在这些点的值为

$$
f(0)=0, \qquad f\left(\frac{1}{8}\right)=0.0156,
$$

$$
f\left(\frac{2}{8}\right)=0.0625, \qquad f\left(\frac{3}{8}\right)=0.1406,
$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0.25,$$

$$f\left(\frac{5}{8}\right)=0.3906,$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=0.5625,$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right)=0.7656。$$

第一步　求 f 的 H 变换(用 FHT)。

$$z=[H_8]\cdot\begin{bmatrix}0.0000\\0.0156\\0.0625\\0.1406\\0.2500\\0.3906\\0.5625\\0.7656\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1874\\-0.4374\\-0.8750\\0.1250\\-1.7500\\0.2500\\0.5000\\0.0000\end{bmatrix},$$

第二步　求 f 的 W 变换(用表 3.3)。

$$y=[W_8]f=\begin{bmatrix}2.1874\\-1.7500\\0.5000\\-0.8750\\0.1250\\-0.0000\\0.2500\\-0.8750\end{bmatrix}。$$

第三步　求 $f(x)$ 的前八个 W 系数 $a_0, a_1, \cdots, a_7$。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^3}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.2734 \\ -0.2186 \\ 0.0625 \\ -0.1094 \\ 0.0156 \\ -0.0000 \\ 0.0313 \\ -0.1094 \end{bmatrix}。$$

显然，$f(x)$ 的 W 系数的近似值的精度随 N 增大而增高。

例如观察 a_0，由积分得

$$a_0 = \int_0^1 f(x)wal_0(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = 0.3333,$$

取 $N=8$ 时，$a_0 = 0.2734$，绝对误差为 0.0599，不超过 1/8。

取 $N=16$ 时，

$$a_0 = \frac{1}{16}\sum_{j=0}^{15} f\left(\frac{j}{16}\right) = 0.3015,$$

绝对误差为 0.0318，不超过 1/16。

取 $N=64$ 时，

$$a_0 = \frac{1}{64}\sum_{j=0}^{63} f\left(\frac{j}{64}\right) = 0.3179,$$

绝对误差为 0.0154，不超过 1/64。

§3 应用概况。W 函数发生器

W 分析的历史虽然不长，但在许多领域中已得到广泛应用，并有一定成效[1,28,29]。

在信号分析方面，例如，大家知道，雷达图象是具有两个空间变量与一个时间变量的信号 $s(x, y; t)$，除了把这种信号当作仅有一个时间变量的信号 $s(t)$ 而制成很复杂的滤波器

外，从来没有对三个变量的信号 $s(x, y; t)$ 按三角函数构成的滤波器。但使用 W 函数却能够设计这种信号的滤波器。

在降低信号带宽方面，W 函数的应用表明能将 PCM 电视信号每个取样的比特数压缩至一半，并且有希望压缩到 1/8。对语言、心电图与脑电图以及其他信号带宽压缩均在研究之中。

在多路复用通信设备中，利用 W 函数直交性划分信道，也是很有前途的。在不少国家中已研究出了这种实验性的复用设备，它们的实现方案有多种，其中有的用来传输雷达数据信号。如我国已制成图象传输机。这种系统具有一定的自适应能力，可使传输可靠性大为提高。

在遥测指令传输方面，W 函数也是很有前途的。国外已有人利用这种直交函数制成一种 Digilock 系统，采用了一组长为 32 的 W 函数，装在“蓝光”深空探测火箭上，据称可用 1/4 瓦的功率使通讯距离达 10 万公里。

新近关于在水下用声波使运动物体成象以及探测地下目标的所谓“入地雷达”的研究，都不断展现 W 函数应用的美好前景。

但由于 W 函数本身固有的特性，从数学观点来看，它们是 p 进紧群（或 p 进局部紧群）的特征，因而所反映的是这一系统——我们称之为逻辑系统的特点，其运算关系则由伪加、伪减、伪乘、逻辑导数、逻辑卷积、逻辑积分等反映出来。因此，应当说，凡与逻辑系统有关的自然现象，利用 W 函数去研究是合适的。但有许多现象，是由三角函数系反映出来的，利用 W 函数于这种系统，就未必合适。因此应当辩证地来对待各种直交函数系。

我们先从 W 函数发生器开始，这是应用 W 函数的出发

点。根据 W 函数与 R 函数的关系，由集成电路(门、加法器、触发器等)可制成 W 函数发生器。

以 $n=3$ 为例来说明首 8 个 W 函数的产生方法。先产生 $R_0=wal_0$，$R_1=wal_1$，$R_2=wal_3$，$R_3=wal_7$ 四个 W 函数，再利用关系 $wal_2=R_1R_2$，$wal_4=R_2R_3$，$wal_5=R_1R_2R_3$，$wal_6=R_1R_3$ 产生其余 4 个 W 函数。

在实际上，一般产生的是 $\widetilde{wal}_k$，$k=0, 1, \cdots, 8$。由于 $\widetilde{wal}_k$ 与 wal_k 的关系是 $wal_k=2\widetilde{wal}_k-1$，因此，如欲由 $\widetilde{wal}_k$ 求得 wal_k 的波形，只须将前者的幅度放大 2 倍再向纵轴下方平移 1 个单位便可。注意，这时 $\widetilde{wal}_k$ 与 $\tilde{R}_k$ 的关系是(用⊕代替乘法)：

$$\widetilde{wal}_0=\tilde{R}_0, \qquad \widetilde{wal}_1=\tilde{R}_1,$$
$$\widetilde{wal}_2=\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2, \qquad \widetilde{wal}_3=\tilde{R}_2,$$
$$\widetilde{wal}_4=\tilde{R}_2\oplus\tilde{R}_3, \qquad \widetilde{wal}_5=\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2\oplus\tilde{R}_3,$$
$$\widetilde{wal}_6=\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_3, \qquad \widetilde{wal}_7=\tilde{R}_3。$$

关于 $\tilde{R}_0$，$\tilde{R}_1$，$\tilde{R}_2$，$\tilde{R}_3$ 的产生法可由两个步骤完成。

第一，由信号源产生脉冲，得出矩形波。信号源由一个晶体振荡器、两个与非门、两个电阻组成。记号─┤□├─表示石英晶体振荡器，它相当于用电阻、电容组成的谐振电路，其优点是频率稳定度较高，输出信号的形状接近于矩形波。信号源的框图如图 5.2 所示。其中 YF_1 与 YF_2 是二个与非门，组成反馈电路，使输入给 YF_1 的微小的电压变化在由 YF_2 输出时得到与之相同的很大的电压变化，电路有正反馈作用，而同时就向晶体提供能量，产生振荡，两个反馈电阻的作用是，r_1 可以起频率微调作用，r_2 将影响起振条件，一般选为 1 千欧。

第二，用分频法产生 $\tilde{R}_3$，$\tilde{R}_2$，$\tilde{R}_1$，$\tilde{R}_0$。由信号源振荡产生的波形，通过 4 个 JK 触发器，从它们的 CP 端(时钟端)输

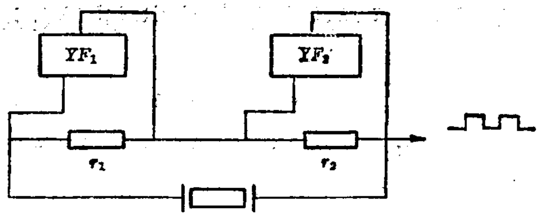


图 5.2

入，则由$\overline{Q}$端分别输出的就是$\tilde{R}_3$，$\tilde{R}_2$，$\tilde{R}_1$，$\tilde{R}_0$，框图如图 5.3 所示。

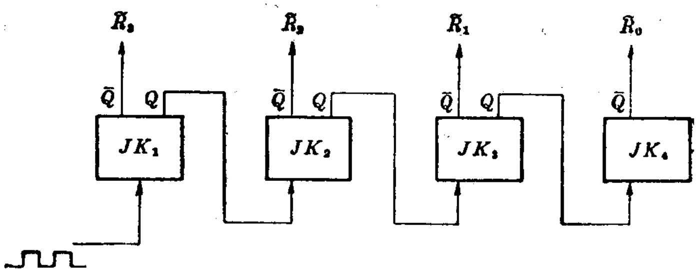


图 5.3

注意，分频时不一定用 JK 触发器，也可改用三级的二进计数器。

在得出$\tilde{R}_3$，$\tilde{R}_2$，$\tilde{R}_1$，$\tilde{R}_0$的波形后，即可借用半加器产生$\widetilde{wal}_2$，$\widetilde{wal}_4$，$\widetilde{wal}_5$，$\widetilde{wal}_6$，框图如图 5.4 所示。

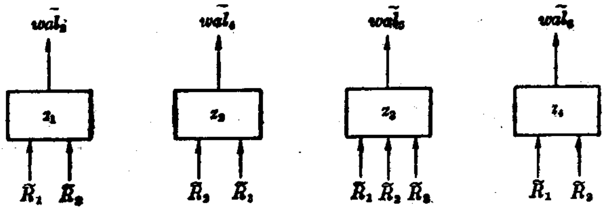


图 5.4

上述方案的逻辑关系比较简单，在列率不太高的情况下是简易可行的。可是当所需 W 函数波形增加时，分频器级数与半加器数目增多，例如 20 级的 W 函数发生器可产生 $2^{20}=1048576$ 个不同的 W 函数波形，而 W 函数发生器的列率也不断提高（目前最高列率可达 10^8—10^{10} Hm)，此时若仍采用上述方案，则多级分频与门电路将引起时延积累过大，以致破坏了 W 函数的直交性。为避免此缺点，在高速运算时，应采用另外的方案，有兴趣的读者可参看文献[29]。

§4 W 函数的几点应用

1° 在信号处理上的应用——信号的列率多路复用

设有 m 个信号

$$a(0),\ a(1),\ \cdots,\ a(m-1), \tag{5.14}$$

需要发送与接收，希望通过一条信道自甲地传输到乙地，我们采用把 m 个信号合成一个、通过信道传到对方后再行分开的办法。

取 m 个互相直交的函数 $f(j,\ x)$（例如 $wal_j(x)$），$j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,\ x\in[a,\ b]$，满足：

$$\int_a^b f(j,\ x)f(k,\ x)dx=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases} \tag{5.15}$$

把它们与(5.14)中的信号分别相乘并累加，得

$$F(x)=\sum_{j=0}^{m-1} a(j)f(j,\ x), \tag{5.16}$$

将 $F(x)$ 通过信道传至对方。

为恢复原来的 m 个信号，只须利用 $f(j,\ x)$ 的直交性，分

别作积分

$$\int_a^b F(x)f(k,\ x)\,dx$$

$$=\int_a^b\left[\sum_{j=0}^{m-1}a(j)f(j,\ x)\right]f(k,\ x)dx=a(k),\qquad(5.17)$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1。$$

(5.17)所表示的运算，就是相关接收或相关选择的过程，这种利用直交函数集去表示信号的方法就称为信号的直交划分，来自m个信源的信号(5.14)合用一条信道传输，这就是多路复用。

据上述原理，可作出直交划分电路的简单框图。以三路为例，如图 5.5 所示。

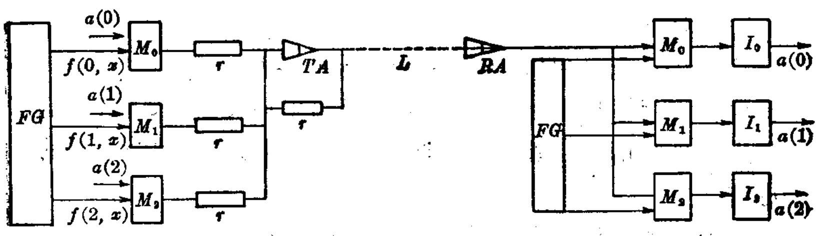


图 5.5

图中，FG：函数发生器，M：乘法器，I：积分器，TA：发送放大器，RA：接收放大器(另需同步线路)。

利用 W 函数作列率多路复用的方法如下。

在正弦载波的振幅调制中，首先使信号 $F(t)$ 通过低通滤波器，抑制 $f>f_0$ 的高频部分，将滤波所得结果表示为 $F^{+}(t)$，然后与载波 $\sqrt{2}\cos\Omega_0 t$ 相乘，结果得出上边带与下边带。

若以W函数作为载波进行幅调，其过程与上述情况相似，只是使信号 $F(t)$ 首先通过列率低通滤波器，抑制 $k\geqslant k_0$ 的高

列率分量，也将滤波结果表示为 $F^+(t)$，然后与载波 $wal(j,t)$ $(=wal_j(t))$ 相乘，结果则可能仅得上边带或下边带，取决于载波列率 j。

用数学式子描述幅调过程如下。

将信号 $F(t)$ 在 $0\leqslant x<1$ 内展成 W 级数

$$
\begin{aligned}
F(t)=a(0)+\sum_{j=1}^{\infty}[&a_c(j)wal(2j,t)\\
&+a_s(j)wal(2j-1,t)],
\end{aligned}
$$

经过列率低通滤波器得

$$
\begin{aligned}
F^+(t)=a(0)+\sum_{j=1}^{k_0}[&a_c(j)wal(2j,t)\\
&+a_s(j)wal(2j-1,t)],
\end{aligned}
$$

与载波 $wal(k,t)$ 相乘

$$
\begin{aligned}
&F^+(t)wal(k,t)\\
&=a(0)wal(k,t)+\sum_{j=1}^{k_0}[a_c(j)wal(2j\oplus k,t)\\
&\quad+a_s(j)wal((2j-1)\oplus k,t)]。 \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

容易证明，当 j 的二进表示的末尾 r 位全为 0；$k=(k_{-n}k_{-n+1}\cdots k_{-r}\underbrace{00\cdots0}_{r\text{位}})$，则产生上边带；当 k 的二进表示的末尾 r 位全为 1 时，则产生下边带；除以上两种情况外，产生部分上边带与部分下边带。

对信号 $F^+(t)wal(k,t)$ 解调时，可乘以载波函数，恢复 $F^+(t)$；$\{F^+(t)wal(k,t)\}wal(k,t)=F^+(t)$。

但在多路复用时，每一路仍应通过低通列率滤波。用 W 函数波形调制与解调的简单框图绘在图 5.6 中。图中 LP 为列率低通滤波器，M 为乘法器（或$\oplus$加法器）。

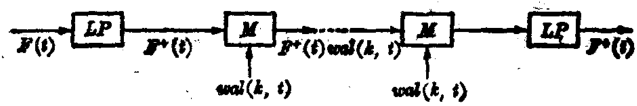


图 5.6

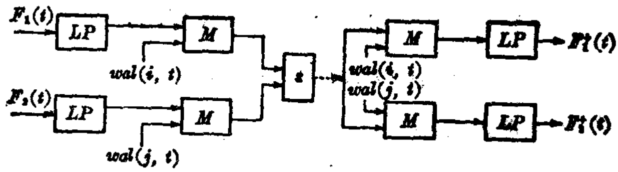


图 5.7

2° 信号的列率多路复用

设作二路复用，信号 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$，分别由 $wal(j, t)$ 与 $wal(k, t)$ 作为载波，框图绘在图 5.7 中。

我们作如下简单说明，当采用单边带调制时，每路用不同列率的 W 函数作载波，这时全部信号所占的带宽为路数与每路带宽的乘积，但也可以在两路中使用同一个列率，例如一路用 $\mathrm{sal}_k(t)$，另一路用 $\mathrm{cal}_k(t)$，这样全部所占的带宽只为前一种情形的一半。

现在给出择多复用方案的例。

在雷达网中，有多个数据需要传递，如目标(飞机等)距离，方位，高度，加速度，大小与特性等。为了传递这些信息，必须采取多路复用数据传输设备，过去一般多采用频分多路复用或时分多路复用。现在可以把 W 函数作为直交编码多路复用的负载波，利用码分多路复用设备进行传输。码分多路复用也有多种方案，这里以择多复用方案为例。其框图在图 5.8 中。

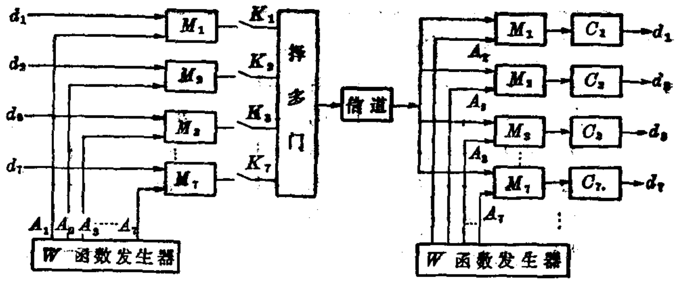


图 5.8

发送时，将各路的每个信息数字与该路的载波（或称码字）相乘，这个功能是由调制器M来完成的。调制器M用模 2 加法器。如果信息数字为 1，则在一帧中M输出为W函数原码，反之，若信息数字为 -1，则 M 输出为W函数反码，七个调制器输出加到择多门，在择多门中将七路数字混合，每个码元时隙中，如果 $+1$ 的路数多，则择多门输出 $+1$，若 -1 的路数多，则择多门输出 -1，亦即择多门送出路数较多的码字作为该时隙的发送数字。发送到线路上，载波（即W函数）一位数字所占的时间作为一个时隙，称为码元，载波一周所占的时间称为一帧。这里一帧是由八个码元组成，第一个码元作为同步码，所以每帧信息码只有七位。

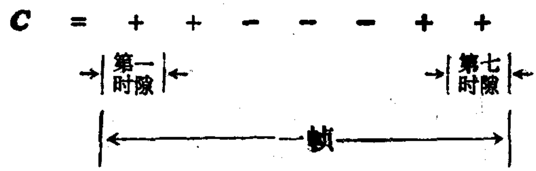
接收时，将收到的一帧数字与本地产生的各路载波在反调制器M中对应位相乘，然后通过择多选择器（它由计数器与判决门组成）选取出现次数较多的那个数字判为各路所发送的信息数字。

例如，设共有七路（$n=7$），第一路到第七路的载波分别为 A_1，A_2，…，A_7，信息数字分别为 -1，-1，$+1$，$+1$，$+1$，-1，-1，已调载波分别为 B_1，B_2，…，B_7，调制与择多过程如下表：

路　数	载　　波　　A_j	信息数字 d_j	已调波 $B_j=d_jA_j$
1	$A_1=+-+-+-+$	$d_1=-1$	$B_1=-+-+-+-$
2	$A_2=+-+++++$	$d_2=-1$	$B_2=-+--+-+$
3	$A_3=++-+--+$	$d_3=+1$	$B_3=++-+--+$
4	$A_4=++--++-$	$d_4=+1$	$B_4=++--++-$
5	$A_5=-++--++$	$d_5=+1$	$B_5=-++--++$
6	$A_6=-++++--$	$d_6=-1$	$B_6=+----++$
7	$A_7=---++++$	$d_7=-1$	$B_7=+++----$

发送数字 $C=++---++$

时隙与帧表示为



接收过程如下表所示：

接收的一帧数字	本地产生的载波	C 与 A_j 对应相乘	每行择多得 d_j
$C=++---++$	$A_1=+-+-+-+$	$+--+--+$	$d_1=+$
	$A_2=+-++-+-$	$+---++-$	$d_2=-$
	$A_3=++-+--+$	$+++-+-+$	$d_3=+$
	$A_4=++--++-$	$++++-+-$	$d_4=+$
	$A_5=-++--++$	$-+-++++$	$d_5=+$
	$A_6=-++++--$	$-+-----$	$d_6=-$
	$A_7=---++++$	$--+--++$	$d_7=-$

对于上述例子，据发送与接收过程不难得出下列结论：(i) 如果七路都用上，则每路都没有余度，也就没有纠错与检错能力，其工作性能与时分制相同。(ii) 不能断开单路数不用，即不能断开一路，或同时断开三路，或同时断开五路，因为

若断开单路数不用，则剩下为偶路数，此时在每一码元时隙中无法作择多选择。(iii) 如果断开两路不用，则工作性能与所断路数有关。例如，如果断开第五路与第六路，或第六路与第七路，则任何一路都不会受影响，能够正常工作。(iv)如果断开任意四路不用，则其他三路都不受影响，能够正常工作。不仅如此，由于三路占用七路位数，所以有多余度，据纠错编码的理论，在一帧中(共七位码元)，即使由于通道失真与干扰引起一位错误，在接收端也能把它纠正过来。(v) 如果断开任意六路，只用一路，则能纠正传输过程中引起的三个错误。

所以，在择多判决传输系统中，可以根据干扰情况选用传输路数，使系统具有纠错能力，也就是说这种系统很容易作成自适应系统，它具有一定的自适应能力。

还应指出，发送端择多判决的过程是有信息损失的。路数越多这种损失也就越大。路数太多，信息损失过大，会导致整个方案不能使用。因此，择多判决方案只适用于路数不太多的情况。

3° 在数字电路中的某些应用

介绍下列两点。

第一，利用 W 函数产生所需要的函数图形。

在模拟电路中产生一些简单的函数(如锯齿波)是比较麻烦的，其精度也不高。但在数字电路中产生某些函数就容易些，其精度可以根据需要进行设计。典型的方法是先列出真值表，然后用布尔代数进行化简，最后得出所需要的电路，不过若要产生有较高精度的函数(例如精度为万分之一的对数波)，这种方法就比较困难。这方面采用 W 函数分析设计给我们开辟了另一个途径，可按下列步骤进行。

(i) 将需要的函数 $f(x)$ 展成 W 级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k wal_k(x),$$

并求出其部分系数 a_0, a_1, …, a_{2^n}(在工程技术上可根据需要的精度求出前若干项的系数就够了)。

(ii) 用分频器产生所需要的 R 函数，并由 R 函数合成所需的 W 函数。

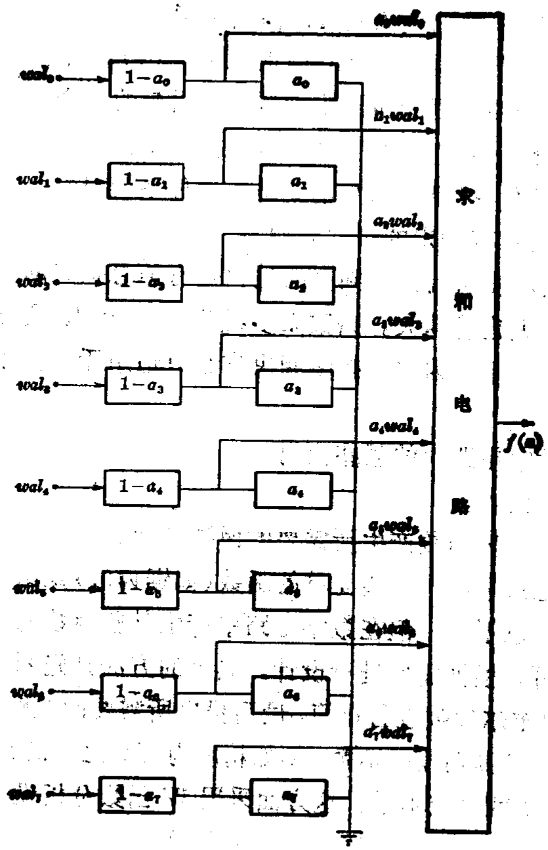


图 5.8

(iii) 把得到的 W 函数按系数 a_k 的值进行加权组合，其输出就是我们所需要的函数。图 5.9 所示为八个 W 函数按 W 系数加权组合的网络。

第二，用W函数群检查多位数字电路的故障。

数字电路与模拟电路不同，它的输入与输出是多路的，例如七位数字电路就有七个输入端与输出端，这当中某一路出了故障往往不容易查出。当我们要检查七位 MOS 移位寄存器时，就需要检查七路的寄存时间与失真情况，这是很麻烦的。如果我们对于七路的输入端加入不同的 W 函数，并对其输出端的 W 函数按 W 系数的值进行加权组合，其输出就变成了单路，而且是某种预定的函数。如果七路中某一路出了故障，其输出的函数将产生某种失真，根据失真的情况，可以很容易判断那一路出了故障。

如图 5.10 所示，输入为 wal_1, wal_3, wal_7, wal_{15}, wal_{31}, wal_{63}, wal_{127} 共七个 W 函数，其输出也应为同样的 W 函数，但时间上有一个迟延。当其各路的迟延时间 $t_1=t_2=\cdots=t_7$

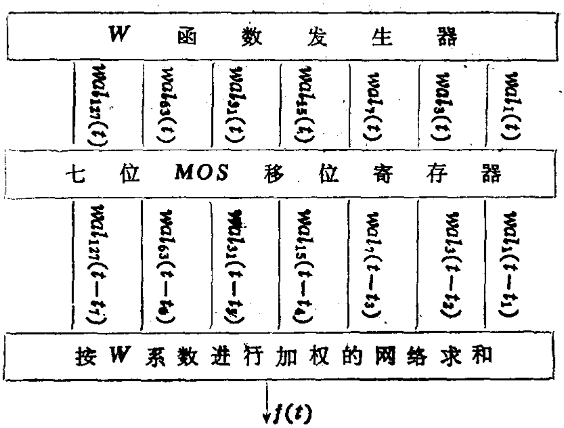


图 5.10

$=T$，而且各路输出 wal_k 波也没有产生失真时，经过加权组合后的输出 $f(t)$ 就是一个锯齿波，如图 5.11。

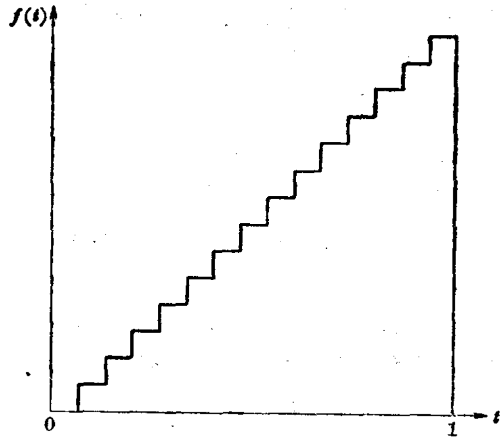


图 5.11

如果某一路出了问题，其输出锯齿波也产生相应的失真，根据失真的情况，可以很容易判断故障所在的支路。

W 函数还可以用来制作频率合成器。二维 W 函数可用作图象识别。在调制过程中，除了调幅、调相、调列率外，还可以调时基。这里不一一介绍了。

习　题

1．试证

$$T_0^{-1}[H_{2^n}]x=[H_{2^n}]\{T_0x\}=[W_{2^n}]x,$$

其中 $[W_{2^n}]$ 与 $[H_{2^n}]$ 分别为 W 矩阵与 H 矩阵，而 T_0 为本章 § 1 中给出的变换，T_0^{-1} 为其逆变换。这个等式说明了什么？

2．用习题 1 中所述的两种方法计算 $[W_{2^3}]$，这里给出

$$x=\begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.707 \\ 0.000 \\ -0.707 \\ -1.000 \\ -0.707 \\ 0.000 \\ 0.707 \end{bmatrix}.$$

3．设 $f(x)=\sin \pi x(0\leqslant x\leqslant 1)$，试取 $N=8$ 用 FWT 计算 $f(x)$ 的 W 展式的首 8 个系数。

4．设 $f(x)=x(0\leqslant x<1)$，试取 $N=32$ 用 FWT 计算 $f(x)$ 的 W 展式的首 32 个系数，并与第二章 § 4 中的例 3 相比较。

第 6 章

Walsh 变式及其性质

Fourier 变式是 Fourier 级数在无限区间情形的发展，Walsh 变式也是这样。本章将讨论 Walsh 变式（简称 W 变式）的基本性质如 Riemann-Lebesgue 引理、卷积定理以及 Parseval 公式等等。我们还要引进广义逻辑导数概念，并给出它在 W 分析中的一些应用。为了统一起见，我们就一般的 p 进情形讨论。最后，将由更一般的观点来介绍有关乘法直交核的知识。

§1 伪乘与广义 W 函数

本节考虑广义 p-进W函数（简称广义W函数或W函数），也就是将前面讨论的周期W函数 $w_n(x)$ 推广到带有连续附标 t 的情形。这时我们采用记号 $w(t, x)$ 以代替 $w_t(x)$。函数 $w_n(x)$，$w(t, x)$ 分别与三角系中函数的对应如下：

W 函数 $w_n(x)$，$n=0, 1, \cdots$

——指数函数 $e^{2\pi ikx}$，$k=0, \pm 1, \cdots$，

广义W函数 $w(t, x)$，$t\in[0, \infty)$

——指数函数 $e^{2\pi itx}$，$t\in(-\infty, \infty)$。

设基本区间为 $[0, \infty)$，$t, x\in[0, \infty)$，它们的 p 进表示分别为

$$x=(x_{-r}\cdots x_{-1}x_0;\ x_1x_2\cdots),\qquad t=(t_{-s}\cdots t_{-1}t_0;\ t_1t_2\cdots),\tag{6.1}$$

与以前一样，当 x 或 t 为 p 进有理数时，约定用有尽表示，其中带非正足标的数字表示数的整数部分，而带正足标的数字则表示小数部分，两者之间用分号隔开。定义数 t 与 x 的**伪乘**为

$$t\odot x=\bigodot_{k=-s}^{r+1} t_{1-k}x_k, \tag{6.2}$$

其中求和记号 $\bigodot$ 表示相加的和按模 p 计算结果。伪乘概念也可以推广到负实数上。规定

$$\begin{aligned} t\odot x &= \ominus((-t)\odot x), &\quad \text{对于 } t\leqslant 0,\ x\geqslant 0,\\ t\odot x &= \ominus(t\odot(-x)), &\quad \text{对于 } t\geqslant 0,\ x\leqslant 0,\\ t\odot x &= (-t)\odot(-x), &\quad \text{对于 } t\leqslant 0,\ x\leqslant 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

但今后我们用不到它们。

例 1 对于 $p=5$ 求自然数 39.6 与 π 的伪乘的积。

【解】 设 $t=39.6$，$x=\pi$，则它们的 5 进表示分别为

$$t=(124;\ 3)=(t_{-2}t_{-1}t_0;\ t_1),$$

$$x=(3;\ 032\cdots)=(x_0;\ x_1x_2x_3\cdots),$$

则据(6.2)，先求出

$$\sum_{k=0}^{3} t_{1-k}x_k=3\cdot 3+4\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 2=17,$$

由于 $17\equiv 2 \pmod 5$ 故

$$t\odot x=\bigodot_{k=0}^{3} t_{1-k}x_k=2。$$

注意，伪加与普通乘法不满足分配律。

例 2 设 $p=5$，取 $x=(1\ 2)$，$y=(4\ 3)$，$t=3$，求 $t(x\oplus y)$ 与 $tx\oplus ty$。

【解】 $t(x\oplus y)=3\cdot 0=0,$

$$\begin{aligned} tx\oplus ty &= 3\cdot 7\oplus 3\cdot 23=(4\ 1)\oplus(2\ 3\ 4)\\ &=(2\ 2\ 0)=60。 \end{aligned}$$

可见 $$t(x\oplus y)\neq tx\oplus ty。$$

在具体计算 x 与 y 的伪乘时可按下述步骤进行为便。

求数 x, y 的伪乘步骤：

1. 求出 x 与 y 的 p 进表示(p 进有理数则用有尽表示)

$$x=x_{-r}\cdots x_{-1}x_0;\ x_1x_2\cdots,$$

$$y=y_{-s}\cdots y_{-1}y_0;\ y_1y_2\cdots;$$

2. 将 x 的表示依平常次序写出，而将 y 的表示依相反方向次序写出，两者小数点(;)对齐成下列格式：

x	$\overrightarrow{x_{-r}\cdots x_{-1}x_0;\ x_1x_2\cdots x_{s+1}}$
y	$\underleftarrow{y_{r+1}\cdots y_2y_1;\ y_0y_{-1}\cdots y_{-s}}$

3. 将上表中上下对应数字相乘再相加；

4. 将所得的和取模 p 即得结果 $x\odot y$。

现在来证明伪乘的下列性质。

性质 1° $t\odot x=x\odot t$。

性质 2° $t\odot(x\oplus y)=\Sigma\{t\odot x,\ t\odot y\}$(右边表示{ }内两数取 Σ 运算)，除了 $x\oplus y$ 能表示为 p 进有理数的无尽表示者外(这是可能发生的，例如 $p=2$ 时，$x=(0;01010101\cdots)$, $y=(0;00101010\cdots)$ 便有 $x\oplus y=(0;\ 01111111\cdots)$)。

性质 3° $t\odot(p^kx)=(p^kt)\odot x$, k 为整数。

证 据定义有

$$t\odot x=t_{1+s}x_{-s}\oplus t_sx_{-s+1}\oplus\cdots\oplus t_{-r}x_{r+1},$$

右边每项两数字的足标的和为 1，共有 $r+s+2$ 项，如果将求和各项倒过来写，且把每项的两个数字调序，其结果就是 $x\odot t$，显然这样做不改变原来的和，这就证明了性质 1°。顺便指出，有时把表示(6.1)中未出现的足标的相应数字算作 0，那

么伪乘可以写成下列形式

$$t\odot x=\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{1-k}x_k, \tag{6.4}$$

由伪乘的这个表示式就可以明显地看出性质 1° 是正确的。性质 1° 称为**对称性**。

为证性质 2°，设

$$y=(y_{-n}\cdots y_{-1}y_0;\ y_1y_2\cdots),$$

则除了性质 2° 中所指的例外，有

$$\begin{aligned} t\odot(x\oplus y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{1-k}(x_k\oplus y_k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(t_{1-k}x_k\oplus t_{1-k}y_k)\\ &=\mathfrak{S}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{1-k}x_k,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{1-k}y_k\right\}\\ &=\mathfrak{S}\{(t\odot x),\ (t\odot y)\}。\end{aligned}$$

性质 2° 表示伪乘关于伪加满足特种分配律。

最后证明性质 3°。当 k 为正整数时，

$$p^k x=(x_{-s}\cdots x_0x_1\cdots x_k;\ x_{k+1}x_{k+2}\cdots),$$

（注意分号 ; 的位置）。因而据伪乘的定义，用 $(z)_\nu$ 表示任意非负实数 z 的第 ν 位数字，则有

$$\begin{aligned} t\odot(p^k x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t_{1-\nu}(p^k x)_\nu=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t_{1-\nu}x_{\nu+k}\\ &=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} t_{1+k-\mu}x_\mu=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}(p^k t)_{1-\mu}x_\mu\\ &=(p^k t)\odot x。\end{aligned}$$

当 k 为非正整数时，情况完全一样，只是在写法上稍有不同而已。性质 3° 证毕。

注意，当 a 不是 p^k 型的数且 $\alpha\neq 0$ 时，我们不能期望有等式

$$t\odot(\alpha x)=(\alpha t)\odot x$$

成立。例如，$p=2$，$\alpha=5$，$t=15$，$x=0.125$，则

$$t\odot(\alpha x)=(1\ 1\ 1\ 1)\odot(0;\ 1\ 0\ 1)=1\oplus 1=0,$$

$$(\alpha t)\odot x=(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)\odot(0;\ 0\ 0\ 1)=1,$$

两者不相等。

有了伪乘概念，便可定义广义 W 函数。

设 $x\in[0,\infty)$，t 为取值于同区间的参数，令

$$w(t,x)=e^{\frac{2\pi i}{p}(t\odot x)}, \tag{6.5}$$

并称之为**广义 W 函数**。

我们指出，$w(t,x)$ 是以前所讲普通 W 函数 $w_n(x)$ 的推广。其实，当 $t=n$ 时，$n=0, 1, 2, \cdots$，有

$$w(n,x)=e^{\frac{2\pi i}{p}(n\odot x)}=w_n(x)。$$

（参看第二章 §6，式(2.43)。）

由伪乘定义，可以得到广义 W 函数的一些性质。

性质 1° 对称性 $w(t,x)=w(x,t)$。

性质 2° 乘法公式

(i) $w(t,x\oplus y)=w(t,x)w(t,y)$；

(ii) $w(t,x\ominus y)=w(t,x)\overline{w}(t,y)$；

在(i)中除了 $x\oplus y$，在(ii)中除了 $x\ominus y$ 能表示成 p 进有理数的无尽表示者外，上述乘法公式成立。

性质 3° $w(t,p^k y)=w(p^k t,y)$，k 为整数。

性质 4° 分解公式

$$w(t,x)=w([t],x)w([x],t),$$

这里[ ]表示数的整部。

证 性质 1° 由伪乘的对称性得到。由伪乘的性质 2°，有

$$w(t,x\oplus y)=e^{\frac{2\pi i}{p}(t\odot(x\oplus y))}=e^{\frac{2\pi i}{p}((t\odot x)\oplus(t\odot y))}$$

$$
= e^{\frac{2\pi i}{p}((t\odot x)+(t\odot y))} = e^{\frac{2\pi i}{p}(t\odot x)} e^{\frac{2\pi i}{p}(t\odot y)}
$$

$$
= w(t,\ x)w(t,\ y),
$$

除了所指的 $x\oplus y$ 的例外值。关于 $w(t, x\ominus y) = w(t, x)\overline{w}(t, y)$ 可类似地得到。故乘法公式 (i)、(ii) 得证。

性质 3° 是伪乘性质 3° 的直接结果。

最后证明性质 4°。首先注意，

$$
\begin{aligned}
t\odot x &= \mathop{\Sigma}\limits^{\circ}\left\{ \mathop{\Sigma}\limits_{\nu=-\infty}^{\circ} t_{1-\nu}x_\nu,\ \mathop{\Sigma}\limits_{\nu=1}^{\infty} t_{1-\nu}x_\nu \right\} \\
&= \mathop{\Sigma}\limits^{\circ}\left\{ \mathop{\Sigma}\limits_{\nu=-\infty}^{\circ} t_{1-\nu}x_\nu,\ \mathop{\Sigma}\limits_{\nu=-\infty}^{\circ} t_\nu x_{1-\nu} \right\} \\
&= \mathop{\Sigma}\limits^{\circ}\{([x]\odot t,\ ([t]\odot x)\},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
w(t,x) &= \exp\left\{ \frac{2\pi i}{p}(([x]\odot t)\oplus([t]\odot x)) \right\} \\
&= \exp\left\{ \frac{2\pi i}{p}(([t]\odot x)+([x]\odot t)) \right\} \\
&= w([t],x)w([x],t)。
\end{aligned}
$$

性质 4° 的分解公式可以作为广义 W 函数的定义。

§2 W 变 式

本小节考虑函数空间 $L_{[0,\infty)}$ 中的 W 变式。设 $f\in L^1_{[0,\infty)}$，即 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是 L 可积函数。令

$$
f^\wedge(t) = \int_0^\infty f(x)\overline{w}(t,x)dx \tag{6.6}
$$

并称之为 f 在空间 $L_{[0,\infty)}$ 中的 **W 变式**。显然，f 的 W 变式对于每个 $t\in[0,\ \infty)$ 都有意义，并且它实现了空间 $L_{[0,\infty)}$ 上的一个线性变换。变式 $f^\wedge$ 是有界的 p 进连续函数。

定理 1 设 $f\in L_{[0,\infty)}$，则由 (6.6) 确定的变式 $f^\wedge$ 对于 $0\leqslant t<\infty$ 中的 p 进无理点是连续的，而对于 p 进有理点是右连续的，因而 $f^\wedge$ 几乎对一切 $0\leqslant t<\infty$ 为连续的。

证 设 t 是 p 进无理点，h 是充分小的正数，$t+h\in[0,\infty)$，则有

$$f^\wedge(t+h)-f^\wedge(t)=\int_0^\infty f(x)\{\overline{w}(t+h,x)-\overline{w}(t,x)\}dx$$
$$=\int_0^\infty f(x)\{e^{-\frac{2\pi i}{p}((t+h)\odot x)}-e^{-\frac{2\pi i}{p}(t\odot x)}\}dx。\tag{6.7}$$

任意指定 $\varepsilon>0$，取充分大的 N，使

$$\int_N^\infty|f(x)|dx<\varepsilon/2,$$

于是

$$\left|f^\wedge(t+h)-f^\wedge(t)-\int_0^N f(x)\left\{e^{-\frac{2\pi i}{p}((t+h)\odot x)}-e^{-\frac{2\pi i}{p}(t\odot x)}\right\}dx\right|<\varepsilon\tag{6.8}$$

当限定 $x\in[0,N)$ 时，$t\odot x$ 的表示式

$$t\odot x=\sum_{\nu=-r}^{s+1}t_{1-\nu}x_\nu$$

中的 r 满足 $r\leqslant r_N$，这里 r_N 仅与 N 有关。这样，上述表示中用到 t 的 p 进代码的那些数字至多是

$$t_{-s},\ t_{-s+1},\ \cdots,\ t_0,\ \ t_1,\ \cdots,\ t_{r_N+1}。$$

由于 t 是 p 进无理数，它的表示中不会出现数字 $p-1$ 的接连无限重复，因此在 t_{r_N+1} 之后必有一位数字异于 $p-1$。假定这位数字是 t_K，$K>r_N+1$，则 $(0;\ 0\cdots0t_Kt_{K+1}\ \cdots)<(p-1)/p^K$。现取 $|h|$ 充分小，使 $|h|<1/p^K$，则

$$(0;0\ \cdots\ 0\ t_K\ t_{K+1}\ \cdots)+h<(p-1)/p^K+1/p^K=1/p^{K-1},$$

于是在 $t+h$ 的 p 进表示中，至多自第 K 位开始以后的数字与 t 的相应数字不同。换句话说，当 $|h|<1/p^K$ 时，$t+h$ 与 t 的第 $K-1$ 位以前的各位数字相同，从而自 t_{r_s+1} 以前的各位数字相同，即有 $(t+h)\odot x=t\odot x$。故由(6.8)得知，当 $|h|<1/p^K$ 时，便有

$$|f^\wedge(t+h)-f^\wedge(t)|<\varepsilon。$$

这就证明了 $f^\wedge(t)$ 在 p 进无理点为右连续。至于左连续性的证明完全类似，因而 $f^\wedge(t)$ 于无理点的连续性得证。我们指出，上述证明已包括了 $f^\wedge(t)$ 在 p 进有理点的右连续性。

定理 1 与 Fourier 分析相应定理不同之处在于后者确定的可积函数的 Fourier 变式是处处连续的。但若引进 p 进连续性概念，则关于这种连续性，两者恰好一致。

设 $g(x)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的有限值函数，$h>0$，若当 $h\to 0$ 时有

$$g(x\oplus h)-g(x)\to 0,\quad g(x\ominus h)-g(x)\to 0,$$

则称 $g(x)$ 在 x 为 **p 进连续**(或称 W 连续)，由于

$$\begin{aligned}f^\wedge(t\oplus h)&=\int_0^\infty f(x)\overline{w}(t\oplus h,x)dx\\&=\int_0^\infty f(x)\overline{w}(t,x)\overline{w}(h,x)dx,\end{aligned}$$

故

$$f^\wedge(t\oplus h)-f^\wedge(t)=\int_0^\infty f(x)\overline{w}(t,x)(\overline{w}(h,x)-1)dx,$$

同理

$$f^\wedge(t\ominus h)-f^\wedge(t)=\int_0^\infty f(x)\overline{w}(t,x)(w(h,x)-1)dx,$$

但当 $h\to 0$ $(h>0)$ 时，$w(h,x)\to 1$，因而得 $f^\wedge(t)$ 的 p 进连续性。这个结果可叙述为

定理 2 设 $f\in L_{[0,\infty)}$，则由(6.6)确定的 W 变式 $f^\wedge(t)$ 对

于 $0\leqslant t<\infty$ 中的每个 t 为 p 进连续（在 $t=0$ 自然只限于 p 进右连续）。

下述定理与 Fourier 分析的 Riemann-Lebesgue 引理相类似。

定理 3 设 $f\in L_{[0,\infty)}$，则由 (6.6) 确定的 W 变式 $f^{\wedge}(t)$，当 $t\to\infty$ 时趋于 0。

证 设 $\varepsilon>0$ 是任意指定的数。由 $f(x)$ 的可积性，存在自然数 $N=N_{\varepsilon}$ 使

$$\left|\int_{N}^{\infty} f(x)\overline{w}(t,\ x)dx\right|\leqslant\int_{N}^{\infty}|f(x)|dx<\varepsilon \tag{6.9}$$

据广义 W 函数的性质 4°，可以写出

$$\begin{aligned}\int_{0}^{N} f(x)\overline{w}(t,\ x)dx&=\int_{0}^{N} f(x)\,\overline{w}([t],\ x)\,\overline{w}([x],\ t)dx\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k}^{k+1} f(x)\overline{w}([t],\ x)\overline{w}(k,\ t)dx\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\overline{w}(k,\ t)\int_{k}^{k+1} f(x)\overline{w}([t],\ x)dx,\end{aligned}$$

从而

$$\left|\int_{0}^{N} f(x)\overline{w}(t,x)dx\right|\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\left|\int_{k}^{k+1} f(x)\overline{w}([t],x)\right|dx。\tag{6.10}$$

对于每个 k，积分

$$\int_{k}^{k+1} f(x)\overline{w}([t],x)dx=\int_{0}^{1} f(x+k)\overline{w}([t],\ x)dx$$

是可积函数 $f(x+k)$ 在 $[0,\ 1)$ 上的 W 展式的第 $[t]$ 项系数，因而对每个 k，有（参看第二章 §4 定理 4）

$$\lim_{t\to\infty}\int_{k}^{k+1} f(x)\overline{w}([t],x)dx=0,$$

回到(6.10)，结合(6.9)便证明了

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty f(x)\overline{w}(t, x)dx = 0。$$

现在我们讨论**积分依 p 进移位的不变性**，这个性质由下面的定理给出。

定理 4 设 a 是非负常数，$f\in L_{[0,\infty)}$。则

$$\int_0^\infty f(x\oplus a)dx = \int_0^\infty f(x\ominus a)dx = \int_0^\infty f(x)dx。\quad (6.11)$$

证 以证明伪加情形为例。

第一步 设 a 的 p 进表示为

$$a = (a_{-r+1}a_{-r+2}\cdots a_0;\ a_1a_2\cdots),\quad a_{-r+1}\neq 0,$$

并任取自然数 N，那么 p^{N+r} 个长度为 $1/p^N$ 的区间的集

$$E_0(x) = \left\{\left[0, \frac{1}{p^N}\right), \left[\frac{1}{p^N}, \frac{2}{p^N}\right), \cdots, \left[\frac{p^{N+r}-1}{p^N}, \frac{p^{N+r}}{p^N}\right)\right\} \quad (6.12)$$

在 p 进移位 $x\oplus a$ 的变换下，除了可列个点不论以外，实现了自身的一一变换，即

$$E_0(x\oplus a) = E_0(x)。$$

其实，$E_0(x)$ 中每个区间 $\left[\frac{\nu}{p^N}, \frac{\nu+1}{p^N}\right)$，$\nu = 0, 1, \cdots, p^{r+N}-1$ 的点可以写成

$$x = (x_{-r+1}\cdots x_0;\ x_1x_2\cdots x_N\cdots),$$

其中 $x_{-r+1}, \cdots, x_N$ 仅与 ν 有关，而其余数字 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 可随意变动。由此可见，$x\oplus a$ 的起首 $r+N$ 个数字也仅与 ν，a 有关，而其余数字可随意变动。这样，区间 $[\nu/p^N, (\nu+1)/p^N)$ 仍然变为 $E_0(x)$ 中的一个区间，且除了使 $x\oplus a$ 为有理点的 x 以外，两区间中的点在这变换下是一一对应的。其次，容易看出，$E_0(x)$ 中不同的区间对应于不同的象区间。因此在变

换 $x \to x\oplus a$ 之下，$E_0(x)$ 实现了自身的一一变换（除了可列个点以外）。

同样可知，在变换 $x \to x\oplus a$ 之下，诸集

$$E_1(x)=\left\{\left[p^r, p^r+\frac{1}{p^N}\right), \cdots, \left[\frac{2\cdot p^{r+N}-1}{p^N}, 2\cdot p^r\right)\right\},$$

$$E_2(x)=\left\{\left[2\cdot p^r,\ 2\cdot p^r+\frac{1}{p^N}\right), \cdots, \left[\frac{3\cdot p^{r+N}-1}{p^N}, 3\cdot p^r\right)\right\},$$

……………………………………

$$E_{k-1}(x)=\left\{\left[(k-1)p^r,\ (k-1)p^r+\frac{1}{p^N}\right), \cdots, \left[\frac{kp^{r+N}-1}{p^N}, kp^r\right)\right\}$$

均各实现自身的一一变换(除了可列个点不论以外)。

第二步　任取 $\varepsilon>0$, 据 $f(x)$ 的可积性，存在充分大的 k, N 以及这样的简单函数 $S_N(x)$，它在 $E_0(x)$，…，$E_{k-1}(x)$ 的每个元（区间）上分别为常数，$|S_N(x)|\leqslant|f(x)|$，且

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x)=f(x),$$

使得

$$\left|\int_0^{kp^r} S_N(x)\,dx-\int_0^\infty f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

据第一步所证，当写出 $S_N(x)$ 的积分为有限和的形式时便可看出

$$\int_0^{kp^r} S_N(x\oplus a)\,dx=\int_0^{kp^r} S_N(x)dx,$$

因此

$$\left|\int_0^{kp^r} S_N(x\oplus a)\,dx-\int_0^\infty f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\left|\int_0^{kp^r} f(x\oplus a)dx-\int_0^\infty f(x)dx\right|<\varepsilon,$$

从而得

$$\int_0^\infty f(x\oplus a)dx=\int_0^\infty f(x)dx。$$

有了定理 4，便容易建立下列定理。

定理 5 设 $f\in L_{[0,\infty)}$，则 $f(x\oplus h)$ 的 W 变式为

$$w(h,\ t)f^\wedge(t),$$

而 $f(x\ominus h)$ 的 W 变式为 $\overline{w}(h,\ t)f^\wedge(t)$。

我们指出，定理中的 $x\oplus h$ 即 x 的 p 进移位 h，h 为参量。在 Fourier 分析也有类似的结果，证明的方法也相同。

证 据定理 4 有

$$\int_0^\infty f(x\oplus h)\,\overline{w}(t,\ x)dx=\int_0^\infty f(y)\overline{w}(t,\ y\ominus h)dy$$

$$=\int_0^\infty f(y)\overline{w}(t,\ y)w(t,\ h)dy$$

$$=w(t,\ h)f^\wedge(t)=w(h,t)f^\wedge(t)。$$

另一结果可类似地证明。

定理 6 设 k 为整数，则 $p^kf(p^kx)$ 的 W 变式为 $f^\wedge(p^{-k}t)$。

证 据广义 W 函数的性质 3°，可得

$$\int_0^\infty p^kf(p^kx)\overline{w}(t,\ x)dx=\int_0^\infty f(y)\overline{w}(t,\ yp^{-k})dy$$

$$=\int_0^\infty f(y)\overline{w}(p^{-k}t,\ y)dy=f^\wedge(p^{-k}t)。$$

下面讨论卷积公式。

首先给出逻辑卷积的定义。

设 $f,\ g\in L_{[0,\infty)}$，称积分

$$\int_0^\infty f(x\ominus t)g(t)dt$$

为 f 与 g 的**逻辑卷积**(简称**卷积**)，并记为

$$(f\circledast g)(x)。$$

易见，当 $f, g\in L_{[0,\infty)}$ 时，$f\circledast g\in L_{[0,\infty)}$。

定理 7 设 $f, g\in L_{[0,\infty)}$，则有卷积公式

$$(f\circledast g)^{\wedge}(t)=f^{\wedge}(t)g^{\wedge}(t)。\tag{6.13}$$

证 要证的等式左边为

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty f(x\ominus u)g(u)du\right\}\overline{w}(t, x)dx\\&=\int_0^\infty g(u)du\int_0^\infty f(x\ominus u)\overline{w}(t, x)dx\quad(\text{据 Fubini 定理})\\&=\int_0^\infty g(u)du\int_0^\infty f(y)\overline{w}(t, y\oplus u)dy\quad(\text{据定理 5})\\&=\int_0^\infty g(u)\overline{w}(t, u)du\int_0^\infty f(y)\overline{w}(t, y)dy\\&=g^{\wedge}(t)f^{\wedge}(t)=(6.13)\text{ 的右边。}\end{aligned}$$

这里用到 Fubini 定理是由于据定理的假设条件，$f, g\in L_{[0,\infty)}$，知上面累次积分绝对收敛。

还有很多类似于 Fourier 分析的性质，不去一一列举了。

最后建立收敛定理。

定理 8 设 $f\in L_{[0,\infty)}$，则关于区间$(0, \infty)$，几乎处处成立

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{p^n} f^{\wedge}(t)w(t,x)dt。$$

注意，这种把函数 f 通过它的变式 $f^{\wedge}$ 表示的公式称为**反演公式**。

证 据 Fubini 定理与广义 W 函数的性质，有

$$\begin{aligned}\int_0^{p^n} f^{\wedge}(t)w(t, x)dt&=\int_0^{p^n} w(t,x)dt\int_0^\infty f(u)\overline{w}(t, u)du\\&=\int_0^{p^n}\int_0^\infty f(u)w(t, x\ominus u)dtdu=\int_0^{p^n}\int_0^\infty f(y\oplus x)\overline{w}(t, y)dydt\\&=\int_0^\infty f(y\oplus x)dy\int_0^{p^n}\overline{w}(t, y)dt。\end{aligned}\tag{6.14}$$

但据伪乘的性质 3° 与 4°，

$$\int_0^{p^n}\overline{w}(t,\ y)dt=p^n\int_0^1\overline{w}(p^nz,\ y)dz=p^n\int_0^1\overline{w}(z,\ p^ny)dz$$

$$=p^n\int_0^1\overline{w}([z],\ p^ny)\overline{w}(z,\ [p^ny])dz=p^n\int_0^1\overline{w}([p^ny],\ z)dz。$$

由于当 $y\in[0,\ 1/p^n)$ 时，$[p^ny]=0$，而当 $y\in[1/p^n,\ \infty)$ 时，$[p^ny]$ 为正整数，故

$$\int_0^{p^n}\overline{w}(t,y)dt=\begin{cases}p^n, & y\in[0,\ 1/p^n),\\ 0, & y\in[1/p^n,\ \infty)。\end{cases}\tag{6.15}$$

于是代入(6.14)便得

$$\int_0^{p^n}f^\wedge(t)w(t,\ x)dt$$

$$=\int_0^{1/p^n}p^nf(y\oplus x)dy=p^n\int_0^{1/p^n}f(y\oplus x)dy。\tag{6.16}$$

现设 $x=x_0$ 为满足 $\nu_0/p^n<x_0<(\nu_0+1)/p^n$ 的任一 p 进无理点，记区间 $(\nu_0/p^n,\ (\nu_0+1)/p^n)$ 为 $I_n(x_0)$，则当 $y\in[0,1/p^n)$ 时，$y\oplus x_0\in I_n(x_0)$，故

$$\int_0^{p^n}f^\wedge(t)w(t,\ x)dt=p^n\int_{I_n(x_0)}f(z)dz=p^n\int_{\nu_0/p^n}^{(\nu_0+1)/p^n}f(z)dz。$$

从而

$$\int_0^{p^n}f^\wedge(t)w(t,\ x_0)dt-f(x_0)$$

$$=p^n\int_{\nu_0/p^n}^{(\nu_0+1)/p^n}\{f(z)-f(x_0)\}dz$$

$$=\frac{1}{h_n}\int_{x_0-h'_n}^{x_0+h''_n}\{f(z)-f(x_0)\}dz,$$

其中 $\quad h'_n+h''_n=h_n=1/p^n$，

$h'_n=x_0-\dfrac{\nu_0}{p^n},h''_n=\dfrac{\nu_0+1}{p^n}-x_0$，

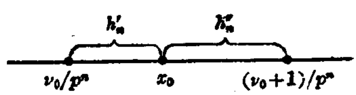


图 6.1

它们的位置如图 6.1 所示。

故

$$\left|\int_0^{p^n} f^\wedge(t)w(t,\ x_0)dt - f(x_0)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{h_n}\int_{x_0-h_n'}^{x_0+h_n''} |f(z)-f(x_0)|dz。\qquad (6.17)$$

据 Lebesgue 积分理论，对于可积函数 $f(x)$，积分区间中的点几乎处处是 Lebesgue 点（L 点），即几乎处处有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(z)-f(x)|dz \to 0,\quad 当\ h\to 0。$$

由此易知，(6.17)右边当 x_0 为 Lebesgue 点（不仅是 p 进无理点）时，随 $n\to\infty$ 而趋于 0。定理证毕。

多元广义 W 函数的定义、性质、多元广义 W 变式以及本节的定理，除定理 7 外，都可类似地得到[34]。在此不再赘述。

§3 逻辑导数及其 W 变式

大家知道，函数 $f(x)$ 的 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$ 的 Fourier 变式为 $(it)^k f^\wedge(t)$，相当于把 $f(x)$ 的变式乘以变量的 k 次幂。在 W 分析中，是否有类似的结果？要回答这个问题，需要一种新的导数概念，即逻辑导数的概念。对周期情形，这种概念已在第四章 §6 中提过。现在把它推广到非周期情形。

设复数 $A_j = A_j(p)$，$j=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$（p 为大于 1 的整数）由(4.24)确定，即

$$A_0 + A_1\omega^k + A_2\omega^{2k} + \cdots + A_{p-1}\omega^{(p-1)k} = k,\qquad (6.18)$$
$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1,$$

其中 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$。可以求出

$$A_0(p) = (p-1)/2,\ \ A_j(p) = \omega^j/(1-\omega^j),\qquad (6.19)$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1。$$

设 $f(x)$ 是定义于 $[0, \infty)$ 上的实值或复值函数，若在这区间上的一点 x 处，和式

$$\sum_{k=-N}^{N} p^k \{A_0 f(x) + A_1 f(x \oplus p^{-k-1}) + \cdots + A_{p-1} f(x \oplus (p-1)p^{-k-1})\} \tag{6.20}$$

当 $N \to \infty$ 时收敛，则称极限值为 $f(x)$ 在点 x 的**逻辑导数**，并记为

$$f^{\langle 1 \rangle}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k \left(\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus j p^{-k-1}) \right)。 \tag{6.21}$$

视 x 在 $[0, \infty)$ 上变动时，可以象通常那样定义逻辑导函数。

除了上面所述的按点极限以外，通常还按照某些函数空间的范数来考虑和式 (6.20) 的极限。例如考虑函数空间 $L^2_{[0,\infty)}$ 时，范数规定如常，即

$$f \in L^2_{[0,\infty)}, \ \|f\|_2 = \left\{ \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

若当 $N \to \infty$ 时 (6.20) 依 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的范数收敛于同空间中的一个元，记作 $f^{\langle 1 \rangle}(x)|_{L^2_{[0,\infty)}}$，简记为 $f^{\langle 1 \rangle}$，则称之为 f **依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逻辑导数**。这时

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=-N}^{N} p^k \left(\sum_{j=0}^{p-1} A_j f(x \oplus j p^{-k-1}) \right) - f^{\langle 1 \rangle}(x) \right\|_2 = 0。$$

类似地，可引进**伴随逻辑导数**，这时，代替和式(6.20)考虑和式

$$\sum_{k=-N}^{N} p^k \left(\sum_{j=0}^{p-1} \overline{A}_j f(x \ominus j p^{-k-1}) \right) \tag{6.22}$$

而其余不变。伴随逻辑导数用记号 $f_{\langle 1 \rangle}(x)$ 表示。

高阶逻辑导数 $f^{\langle k \rangle}$, $f_{\langle k \rangle}$ 用归纳法定义。

例 1 设 $f(x)$ 为区间 $[0,1)$ 的特征函数，

$$f(x) = K_{[0,1)}(x),$$

试求它的逻辑导数(对于任意整数 $p>1$)。

【解】 当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=1$，且当 $k\geqslant 0$ 时，$x\oplus jp^{-k-1}\in[0,1)$，$j=1,\cdots,p-1$，故 $f(x\oplus jp^{-k-1})=1$，从而

$$
\begin{aligned}
&A_0f(x)+A_1f(x\oplus p^{-k-1})+\cdots+A_{p-1}f(x\oplus(p-1)p^{-k-1})\\
&\quad=A_0+A_1+\cdots+A_{p-1}=0,
\end{aligned}
$$

当 $k<0$ 时，$x\oplus jp^{-k-1}\bar{\in}[0,1)$，$j=1,\cdots,p-1$，因此有 $f(x\oplus jp^{-k-1})=0$，从而

$$
\begin{aligned}
&A_0f(x)+A_1f(x\oplus p^{-k-1})+\cdots\\
&\qquad+A_{p-1}f(x\oplus(p-1)p^{-k-1})=A_0。
\end{aligned}
$$

于是，对于 $0\leqslant x<1$，

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x)&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}p^k\{A_0f(x)+\cdots\\
&\qquad+A_{p-1}f(x\oplus(p-1)p^{-k-1})\}\\
&=\sum_{k=-\infty}^{-1}p^kA_0\cdot 1=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{2}。
\end{aligned}
$$

当 $jp^{k-1}\leqslant x<(j+1)p^{k-1}$ 时，$j=1,\cdots,p-1,k=1,2,\cdots$，唯有 $x\oplus(p-j)p^{k-1}$ 才可能属于 $[0,1)$，亦即当 $jp^{k-1}\leqslant x<jp^{k-1}+1$ 时 $x\oplus(p-j)p^{k-1}\in[0,1)$，此时 $f(x\oplus(p-j)p^{k-1})=1$ 而和(6.21)中其余各项均为 0，相应的逻辑导数为 $f^{(1)}(x)=p^{-k}A_{p-j}$；而当 $jp^{k-1}+1\leqslant x<(j+1)p^{k-1}$，$j=1,\cdots,p-1$，$k=1,2,\cdots$，和中各项全为 0（自变量的值全不属于 $[0,1)$），相应的逻辑导数为 0。故得

$$
f^{(1)}(x)=\begin{cases}1/2,\ 0\leqslant x<1,\\ p^{-k}A_{p-j},\ jp^{k-1}\leqslant x<jp^{k-1}+1,\ k=1,2,\cdots,\\ 0,\ jp^{k-1}+1\leqslant x<(j+1)p^{k-1},\ j=1,\cdots,p-1。\end{cases}
$$

例 2 设

$$
f(x)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant x<1,\\ 2,\ 1\leqslant x<2,\\ 0,\ x\geqslant 2,\end{cases}
$$

试求 f 在 $0\leqslant x<1$ 上每点的一阶逻辑导数(对于 $p=3$)。

【解】 考察和式

$A_0f(x)+A_1f(x\oplus 3^{-k-1})+A_2f(x\oplus 2\cdot 3^{-k-1})$，$0\leqslant x<1$。

当 $k\geqslant 0$ 时，$x\oplus 3^{-k-1}$, $x\oplus 2\cdot 3^{-k-1}$ 与 x 同属于区间 $[0, 1)$，故相应的函数值全为 1，而和 $A_0+A_1+A_2=0$。

当 $k=-1$ 时，$x\oplus 1\in[1, 2)$，$x\oplus 2\in[2, 3)$，故 $f(x\oplus 1)=2$, $f(x\oplus 2)=0$ $(0\leqslant x<1)$。当 $k\leqslant -2$ 时，$f(x\oplus 3^{-k-1})=0$, $f(x\oplus 2\cdot 3^{-k-1})=0$。于是，当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=3^{-1}\{A_0\cdot 1+A_1\cdot 2\}+\sum_{k=-\infty}^{-2}3^kA_0\cdot 1$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega}{1-\omega}+\frac{1}{2}=\frac{5+4\omega}{18},\quad \omega=e^{2\pi i/3}。$$

在本章 §4 讲过 Walsh 变式后我们将介绍逻辑导数的另一种求法。

求一个函数的逻辑导数的运算显然是线性运算，下面列举它的性质并加以证明。

性质 1° 用 $w^{\langle r\rangle}(t, x)$ 表示广义 W 函数 $w(t, x)$ 对 x 的 r 阶逻辑导数，t 视为参数，$w_{(r)}(t, x)$ 的意义类似。则对每个 $t\in[0, \infty)$，有

$$w^{\langle r\rangle}(t, x)=t^rw(t, x), \tag{6.23}$$

$$w_{(r)}(t, x)=t^rw(t, x)。 \tag{6.24}$$

证 我们以证明(6.23)为例。对每个 $t\in[0, \infty)$，有

$$w^{\langle 1\rangle}(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p^k\{A_0w(t, x)+A_1w(t, x\oplus p^{-k-1})+\cdots$$
$$+A_{p-1}w(t, x\oplus(p-1)p^{-k-1})\}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p^k\{A_0+A_1w(t, p^{-k-1})+\cdots$$
$$+A_{p-1}w(t, (p-1)p^{-k-1})\}w(t, x)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k \{ A_0 + A_1 \omega^{t-s} + \cdots + A_{p-1} \omega^{(p-1)t-s} \} w(t, x),$$

由于花括号内的式子等于 t_{-k}（参看(6.18)），故上面级数对 x 为绝对收敛，并且它等于

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k t_{-k} w(t, x) = w(t, x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k t_{-k} = t w(t, x)。$$

于是(6.23)对 $r=1$ 成立。当 $r>1$ 时，(6.23)的证明可由归纳法完成。

下面考察 $L^2_{[0,\infty)}$ 中 W 变式的两条简单定理。设 $f \in L^2_{[0,\infty)}$，则与 Fourier 变式情形类似，可以证明，积分

$$\int_0^N f(x) \overline{w}(t, x) dx$$

当 $N \to \infty$ 时依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义收敛于 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的一个元，仍用 $f^\wedge$ 记之，称为 f 依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的 W 变式，并记成

$$f^\wedge(t) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f(x) \overline{w}(t, x) dx。\qquad (6.25)$$

由于变式 $f^\wedge \in L^2_{[0,\infty)}$，依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的极限

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f^\wedge(t) w(t, x) dt$$

也存在，我们称它为 $f^\wedge$ 的逆 W 变式，并且还成立

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f^\wedge(t) w(t,x) dt。\qquad (6.26)$$

此外，还有重要的 Parseval-Plancherel 公式：

$$\int_0^\infty |f^\wedge(t)|^2 dt = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx。\qquad (6.27)$$

所有这些基本结果，都将在更一般的前提下给予证明，参看本章§4。现在先利用它们来建立有关逻辑导数的变式的几个结果。

性质 2° 设 $f\in L^2_{[0,\infty)}$，$t^r f^\wedge(t)\in L^2_{[0,\infty)}$，其中 $f^\wedge$ 是 f 在 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的 W 变式，则 f 有依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的 r 阶逻辑导数 $f^{\langle r\rangle}$，且它等于 $t^r f^\wedge(t)$ 依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逆 W 变式：

$$f^{\langle r\rangle}(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N t^r f^\wedge(t)w(t,\ x)dt。\qquad (6.28)$$

证 只证明 $r=1$ 的情形，一般情形可由归纳法完成。$tf^\wedge(t)$ 在 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的逆 W 变式为

$$g(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N tf^\wedge(t)w(t,\ x)dt,$$

则 $g\in L^2_{[0,\infty)}$，且 g 在 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的 W 变式为 $tf^\wedge(t)$。令

$$S_N(x)=\sum_{k=-N}^{N}p^k\left(\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right),$$

容易验明，S_N 在 $L^2_{[0,\infty)}$ 中的 W 变式为 $\sum\limits_{k=-N}^{N}p^kt_{-k}f^\wedge(t)$。据 Parseval 公式，有

$$\|S_N-g\|_2=\left\|\sum_{k=-N}^{N}p^kt_{-k}f^\wedge(t)-tf^\wedge(t)\right\|_2=\left\|\sum_{|k|>N}p^kt_{-k}f^\wedge\right\|_2,$$

当 $N\to\infty$ 时，$\left|\sum\limits_{|k|>N}p^kt_{-k}f^\wedge(t)\right|^2$ 几乎处处收敛于 0，且以可积函数 $t^2|f^\wedge(t)|^2$ 为界，故据 Lebcsgue 控制收敛定理，得

$$\|S_N-g\|_2\to 0\quad (N\to\infty)。$$

即 f 存在依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逻辑导数 $f^{\langle 1\rangle}(x)$，且

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N tf^\wedge(t)w(t,\ x)dt。$$

由(6.28)可以看到，函数的求 r 阶逻辑导数的运算相当于在变式 $f^\wedge(t)$ 处乘以因子 t^r。

性质 3° 设 $f(x)$ 有依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逻辑导数 $f^{\langle r\rangle}(x)$，则 $t^rf^\wedge(t)\in L^2_{[0,\infty)}$，且 $t^rf^\wedge(t)$ 的逆 W 变式为 $f^{\langle r\rangle}(x)$：

$$f^{\langle r\rangle}(x)=\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N t^rf^\wedge(t)w(t,\ x)dt。\qquad (6.29)$$

证 只证 $r=1$ 情形。由定理条件知，当 $N\to\infty$ 时，

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N}p^k(A_0f(x)+A_1f(x\oplus p^{-k-1})+\cdots+A_{p-1}f(x\oplus(p-1)p^{-k-1}))-f^{\langle 1\rangle}(x)\right\|_2\to 0,$$

故据 Parseval 公式得

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N}p^k(A_0+A_1w(t,\ p^{-k-1})+\cdots+A_{p-1}w(t,\ p^{-k-1}))f^\wedge(t)-(f^{\langle 1\rangle})^\wedge(t)\right\|_2\to 0,$$

但上式范数中的和趋于 $tf^\wedge(t)$，$(N\to\infty)$，而由 $f^{\langle 1\rangle}\in L^2_{[0,\infty)}$ 知 $(f^{\langle 1\rangle})^\wedge\in L^2_{[0,\infty)}$，于是 $tf^\wedge(t)=(f^{\langle 1\rangle})^\wedge(t)\in L^2_{[0,\infty)}$，且

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^N tf^\wedge(t)w(t,\ x)dt。$$

由(6.29)可以看到，当 f 有依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逻辑导数时，则导数的变式为

$$t^rf^\wedge(t)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^N f^{\langle 1\rangle}(x)\overline{w}(t,\ x)dx, \qquad (6.30)$$

这与 Fourier 变式情形相类似。

性质 4° 设 $f\in L^2_{[0,\infty)}$，$f^\wedge$ 有依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的 r 阶逻辑导数 $(f^\wedge)^{\langle 1\rangle}$，则 $(\ominus x)^rf(x)\in L^2_{[0,\infty)}$，且它的 W 变式为

$$(f^\wedge(t))^{\langle 1\rangle}。$$

证 设 $f^\wedge$ 依 $L^2_{[0,\infty)}$ 意义的逻辑导数为 $(f^\wedge)^{\langle 1\rangle}=g$，则

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N}p^k(A_0f^\wedge(t)+\cdots+A_{p-1}f^\wedge(t\oplus(p-1)p^{-k-1}))-g(t)\right\|_2\to 0。$$

据 Parseval 公式，有

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} p^k(A_0 f(x) + \cdots + A_{p-1}\overline{w}((p-1)p^{-k-1}, x) f(x)) - h(x)\right\|_2 \to 0, \tag{6.31}$$

其中 $h^\wedge = g$。利用恒等式

$$A_0 + A_1\overline{w}^{x_k} + \cdots + A_{p-1}\overline{w}^{(p-1)x_k} = \ominus x_k, \tag{6.32}$$

由(6.31)得到

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} p^k(\ominus x_k) f(x) - h(x)\right\|_2 \to 0,$$

故 $h(x) = (\ominus x) f(x)$，即

$$((\ominus x) f(x))^\wedge = (f^\wedge(t))^{\langle 1 \rangle}。$$

于是我们的论断当 $r = 1$ 时得证。一般情形可用归纳法完成。

可以引进多元函数的逻辑偏导数、伴随逻辑偏导数与混合逻辑偏导数的概念，本节中相应的结果也成立，还可得到混合逻辑偏导数交换次序的条件，有兴趣的读者可参看[34]。

§4 例题。W 变式表

本节给出求 W 变式的例，并作一个基本变式表。可以看出，能直接求出W变式的函数的类型并不多，除了方波形函数以外，一般很难指望求出它们的 W 变式，这时应求助于快速W变换。另一方面，关于基本运算的 W 变式，则与 Fourier 变式十分类似。

例 1 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, \infty), \end{cases}$$

试求 $f^\wedge(t)$。

【解】 据定义

$$f^{\wedge}(t)=\int_0^{\infty} f(x)\,\overline{w}(t,\,x)dx=\int_0^1 \overline{w}(t,\,x)dx,$$

利用 W 函数的分解公式，并注意当 $x\in[0,\,1)$ 时，$[x]=0$，于是有

$$w(t,\,x)=w([t],\,x)w([x],\,t)=w([t],\,x),$$

再由 W 函数的直交性，求出

$$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\,1),\\ 0, & t\in[1,\,\infty)。\end{cases}$$

由此结果可见，这样的函数 $f(x)$ 的 W 变式是它自己。$f(x)$ 与 $f^{\wedge}(t)$ 的图形绘在图 6.2 中。

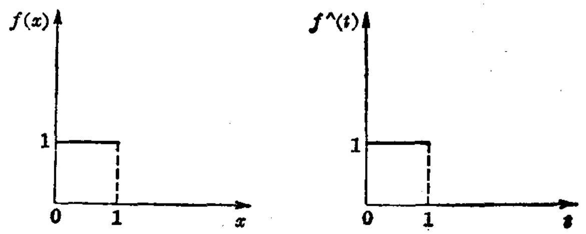


图 6.2

例 2 求

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<3/4,\\ 0, & 3/4\leqslant x<\infty\end{cases}$$

的 W 变式(对 $p=2$ 情形)。

【解】 我们有

$$f^{\wedge}(t)=\int_0^{3/4} w(t,\,x)dx=\int_0^{3/4} w([t],\,x)dx。$$

于是得到：

当 $0\leqslant t<1$ 时，$\quad f^{\wedge}(t)=\dfrac{3}{4}\cdot 1=\dfrac{3}{4},$

$1\leqslant t<2$ 时， $f^{\wedge}(t)=\int_0^{3/4} w(1,\ x)dx=\frac{1}{4}$，

$2\leqslant t<3$ 时， $f^{\wedge}(t)=\int_0^{3/4} w(2,\ x)dx=\frac{1}{4}$，

$3\leqslant t<4$ 时， $f^{\wedge}(t)=\int_0^{3/4} w(3,\ x)dx=-\frac{1}{4}$，

$4\leqslant t<\infty$ 时，

$$
\begin{aligned}
f^{\wedge}(t)&=\int_0^{3/4} w(t,\ x)dx=\frac{1}{4}\int_0^3 w\left(t,\ \frac{y}{4}\right)dy\\
&=\frac{1}{4}\int_0^3 w\left(\frac{t}{4},\ y\right)dy=\frac{1}{4}\int_0^3 w\left(\left[\frac{t}{4}\right],\ y\right)w\left([y],\ \frac{t}{4}\right)dy\\
&=\frac{1}{4}\left\{\int_0^1 w\left(\left[\frac{t}{4}\right],\ y\right)dy+w_1\left(\frac{t}{4}\right)\int_1^2 w\left(\left[\frac{t}{4}\right],\ y\right)dy\right.\\
&\qquad\left.+\ w_2\left(\frac{t}{4}\right)\int_2^3 w\left(\left[\frac{t}{4}\right],\ y\right)dy\right\}=0。
\end{aligned}
$$

故有

$$
f^{\wedge}(t)=\begin{cases}3/4,\ 0\leqslant t<1,\\ 1/4,\ 0\leqslant t<2,\\ 1/4,\ 2\leqslant t<3,\\ -1/4,\ 3\leqslant t<4\\ 0,\ 4\leqslant t<\infty。\end{cases}
$$

$f(x)$ 与 $f^{\wedge}(t)$ 的图形如图 6.3 所示。

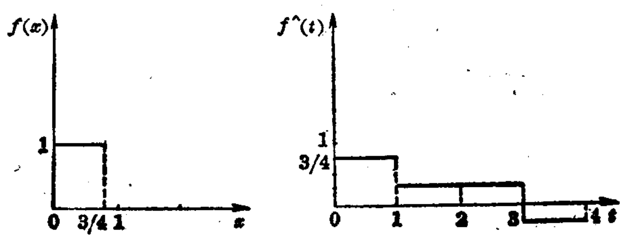


图 6.3

例 3 求

$$f(x)=\begin{cases}\alpha,\ 0\leqslant x<1,\\ \beta,\ 1\leqslant x<2,\\ 0,\ 2\leqslant x<\infty\end{cases}$$

的 W 变式，α,β 为实数(对 $p=2$ 的情形)。

【解】 由定义，有

$$\begin{aligned}f^{\wedge}(t)&=\alpha\int_0^1 w(t,\ x)dx+\beta\int_1^2 w(t,\ x)dx\\&=\alpha\int_0^1 w([t],x)dx+\beta w_1(t)\int_1^2 w([t],\ x)dx\\&=\alpha\int_0^1 w([t],x)dx+\beta w_1(t)\int_0^1 w([t],\ x)dx,\end{aligned}$$

我们省去具体计算步骤而写出最后的结果：

$$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}\alpha+\beta,\ 0\leqslant t<1/2,\\ \alpha-\beta,\ 1/2\leqslant t<1,\\ 0,\ 1\leqslant t<\infty。\end{cases}$$

这时 Parseval-Plancherel 公式呈下述恒等式形式：

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2],\quad \alpha,\ \beta\text{为实数}.$$

我们再举两个稍为复杂的例子。

例 4 设

$$f(x)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant x<\alpha,\\ 0,\ \alpha\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

其中 α 是小于 1 的实数。试证，对 $p=2$，有

$$f^{\wedge}(t)=(\alpha-r_n)w([t],\ \alpha),\tag{6.33}$$

其中 $r_n=r_n(\alpha)$ 为满足 $r/2^n\leqslant\alpha<(r+1)/2^n$ 的区间端点中距 α 较近者。当 α 为此种区间的中点时，r_n 为右端点，并且这里 n 随 t 而定，$[t]=k=k_{-n}k_{-n+1}\cdots k_{-1}k_0$，$k_{-n}=1$。

证 求出

$$f^{\wedge}(t)=\int_0^{\alpha} w(t,\ x)\,dx=\int_0^{1/2^n} w_k(x)\,dx+\int_{1/2^n}^{2/2^n} w_k(x)dx+\cdots$$

$$+\begin{cases}\int_{r/2^n}^{\alpha} w_k(x)dx,\ 若\ \alpha-\dfrac{r}{2^n}<\dfrac{1}{2^{n+1}},\\ \int_{\alpha}^{(r+1)/2^n} w_k(x)dx,\ 若\ \dfrac{r+1}{2^n}-\alpha\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}。\end{cases}$$

但是

$$\int_0^{1/2^n} w_k(x)dx=\int_0^{1/2^n} w_{k\ominus 2^n}(x)w_{2^n}(x)dx$$

$$=\int_0^{1/2^n} w_{k\ominus 2^n}(x)\,w_1(2^n x)\,dx=\frac{1}{2^n}\int_0^1 w_1(y)dy\cdot(\pm1)=0,$$

$$\int_{1/2^n}^{2/2^n} w_k(x)dx=\frac{1}{2^n}\int_1^2 w_1(y)dy\cdot(\pm1)=0,$$

等等。因此当 $\alpha-\dfrac{r}{2^n}<\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 时，

$$f^{\wedge}(t)=\int_{r/2^n}^{\alpha} w_k(x)dx=\int_{r/2^n}^{\alpha} w_{2^n}(x)w_{k\ominus 2^n}(x)dx$$

$$=w_{k\ominus 2^n}(\alpha)\int_{r/2^n}^{\alpha} w_{2^n}(x)dx=w_k(\alpha)w_{2^n}(\alpha)(\alpha-r/2^n)$$

$$=(\alpha-r/2^n)w_k(\alpha)。$$

而当 $\dfrac{r+1}{2^n}-\alpha\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 时，同样可得

$$f^{\wedge}(t)=\left(\frac{r+1}{2^n}-\alpha\right)w_k(\alpha)\,w_{2^n}(\alpha)$$

$$=\left(\frac{r+1}{2^n}-\alpha\right)w_k(\alpha)\cdot(-1)=\left(\alpha-\frac{r+1}{2^n}\right)w_k(\alpha)。$$

这正是我们所要求的结果。

例 5 用 $\kappa_{[\alpha,\beta)}(x)$ 表示区间 $[\alpha,\ \beta)$ 上的特征函数，亦即

$$\kappa_{[\alpha,\beta)}(x)=\begin{cases}1,\ x\in[\alpha,\ \beta),\\ 0,\ x\bar{\in}[\alpha,\ \beta)。\end{cases}$$

试证函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\kappa_{[k,k+1)}(x)$$

的 W 变式为

$$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\overline{w}_j(t),\ 0\leqslant t<1,\\ 0,\ 1\leqslant t<\infty,\end{cases}\tag{6.34}$$

其中 $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$，并且变式是对大于1的任意整数 p 而求的。

证 写出

$$\begin{aligned}f^{\wedge}(t)&=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\kappa_{[k,k+1)}(x)\overline{w}(t,x)dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_k^{k+1}\overline{w}(t,x)dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_k^{k+1}\overline{w}([t],x)\overline{w}(k,t)dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\overline{w}(k,t)\int_0^1\overline{w}([t],x)dx,\end{aligned}$$

注意到记号 $w(k,t)=w_k(t)$ 并据 W 函数系的直交性便得所需结果。

例6 对于任意整数 $p>1$ 情形，试求

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ x\in[0,1),\\ 0,\ x\in[1,\infty)\end{cases}$$

的 W 变式。

【解】 写出

$$\begin{aligned}f^{\wedge}(t)&=\int_0^1(1-x)\overline{w}(t,x)dx\\&=\int_0^1(1-x)\overline{w}([t],x)dx,\end{aligned}\tag{6.35}$$

由于 $x\in[0,1)$ 的 p 进表示为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p^{-k},$$

故据(6.18)得到

$$x_k=A_0+A_1\omega^{x_k}+A_2\omega^{2x_k}+\cdots+A_{p-1}\omega^{(p-1)x_k},\quad(6.36)$$

其中 $\omega=e^{2\pi i/p}$, $A_0, A_1, \cdots, A_{p-1}$ 由 (6.19) 确定。于是

$$x_k=A_0+A_1w(p^{k-1},x)+A_2w(2p^{k-1},x)+\cdots+A_{p-1}w((p-1)p^{k-1},x),$$

而

$$x=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1w(p^{k-1},x)+\cdots+A_{p-1}w((p-1)p^{k-1},x))。\quad(6.37)$$

如果令

$$\begin{aligned}&l_{k1}=A_1p^{-k},\ l_{k2}=A_2p^{-k},\ \cdots,\\&l_{k,p-1}=A_{p-1}p^{-k},\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}\quad(6.38)$$

则(6.37)可写成

$$x=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(l_{k1}w(p^{k-1},x)+\cdots+l_{k,p-1}w((p-1)p^{k-1},x)),\quad(6.39)$$

代入(6.35)，便求得

$$f^{\wedge}(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\overline{w}([t],x)\,dx-\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}(l_{k1}w(p^{k-1},x)+\cdots+l_{k,p-1}w((p-1)p^{k-1},x))\overline{w}([t],x)dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2},\ 0\leqslant t<1,\\ -l_{kj},\ jp^{k-1}\leqslant t<jp^{k-1}+1,\\ \qquad j=1,2,\cdots,p-1,\ k=1,2,\cdots,\\ 0,\ \text{其余的}\ x。\end{cases}\quad(6.40)$$

现在我们举例说明逻辑导数的另一种求法。

例 7 求例 1 中函数 $f(x)$ 的一阶逻辑导数。

【解】 由例 1 知 f 的 Walsh 变式是它自己，而且 $f^\wedge$，$f\in L\cap L^2$。故据定理 8 得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{p^n} f^\wedge(t)w(t,\ x)dt=\int_0^1 w(t,\ x)dt。$$

再据本章 §3 性质 2°，得

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=\int_0^1 tw(t,\ x)dt。$$

利用(6.37)，t 在$[0,1)$上的展式得(A_j 等由(6.19)确定)

$$\begin{aligned}f^{\langle 1\rangle}(x)&=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1w(p^{k-1},\ t)+\cdots\right.\\&\left.\quad+A_{p-1}w((p-1)p^{k-1},\ t))\right\}w([x],\ t)dt\\&=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1},\ t)+\cdots\right.\\&\left.\quad+A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1},\ t))\right\}w([x],\ t)dt,\end{aligned}$$

由此据 W 系的直交性得

$$f^{(1)}(x)=\begin{cases}1/2,\ 0\leqslant x<1,\\p^{-k}A_{p-j},\ jp^{k-1}\leqslant x<jp^{k-1}+1,\\0,\ jp^{k-1}+1\leqslant x<(j+1)p^{k-1},\\\qquad j=1,\ \cdots,\ p-1,\ k=1,\ 2,\ \cdots。\end{cases}$$

这结果与本章 §3 所得的相同。

例 8 求例 3 中函数 $f(x)$ 的一阶逻辑导数（对任意整数 $p>1$）。

【解】 用例 1 中所述方法。先求得

$$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}\alpha+\beta\overline{w}_1(t),\ 0\leqslant t<1,\\ 0,\ t\geqslant 1。\end{cases}$$

由此给出 f 的表示(反演公式)

$$f(x)=\int_0^1(\alpha+\beta\overline{w}_1(t))w(x,\ t)dt。$$

故

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=\int_0^1 t(\alpha+\beta\overline{w}_1(t))w([x],\ t)dt$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1},\ t)+\cdots\right.$$

$$\left.+A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1},\ t))\right\}\cdot\{\alpha+\beta\overline{w}_1(t)\}w([x],\ t)dt。$$

整理得

$$f^{\langle 1\rangle}(x)=\int_0^1\left\{\frac{\alpha}{2}+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1},\ t)+\cdots\right.$$

$$+A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1},\ t))+\frac{\beta}{2}\overline{w}_1(t)$$

$$+\beta\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1}\oplus 1,\ t)+\cdots$$

$$\left.+A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1}\oplus 1,\ t))\right\}\cdot w([x],\ t)dt$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{\alpha}{2}+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1},\ t)+\cdots\right.$$

$$+A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1},\ t))+\frac{\beta}{2}\overline{w}_1(t)$$

$$+\beta p^{-1}(A_1\overline{w}(0,\ t)+A_2\overline{w}((p-1),\ t)+\cdots$$

$$+A_{p-1}\overline{w}(2,t))+\beta\sum_{k=2}^{\infty}p^{-k}(A_1\overline{w}((p-1)p^{k-1}$$

$$+1, t) + \cdots + A_{p-1}\overline{w}(p^{k-1}+1, t))\Big\}\cdot w([x], t)dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta A_1}{p}, \ 0 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{\alpha A_{p-1}}{p} + \dfrac{\beta}{2}, \ 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{\alpha A_{p-j}}{p} + \dfrac{\beta A_{p-j+1}}{p}, \ j \leqslant x < j+1, \\ \cdots \qquad\qquad j=2, \cdots, p-1, \\ \dfrac{\alpha A_{p-j}}{p^k}, \ jp^{k-1} \leqslant x < jp^{k-1}+1, \\ \qquad j=1, \cdots, p-1, k=2, 3, \cdots, \\ \dfrac{\beta A_{p-j}}{p^k}, \ jp^{k-1}+1 \leqslant x < jp^{k-1}+2, \\ \qquad j=1, \cdots, p-1, k=2, 3, \cdots, \\ 0, \text{其余的 } x。 \end{cases}$$

如与本章§3例2比较，可见这个方法较为明确便利。我们将它的步骤叙述如下。

求 $f(x)$ 的逻辑导数的步骤：

1．求出 f 的变式 $\hat{f}$，

2．借用 $\hat{f}$ 表示 f（反演公式），

3．形式上求逻辑导数（判别条件满足），

4．计算结果。

下面附上简单的 W 变换表，以备查阅（表6.1）。

表 6.1　简单的 Walsh 变换表

$f(x)$	$f^{\wedge}(t)=\int_0^{\infty} f(x)\overline{w}(t, x)dx$	条　　件
$\alpha f(x)+\beta g(x)$	$\alpha f^{\wedge}(t)+\beta g^{\wedge}(t)$	$f, g\in L$
$f(x\oplus h)$	$w(t, h)f^{\wedge}(t)$	$f\in L$
$w(h, x)f(x)$	$f^{\wedge}(t\ominus h)$	$f\in L$
$p^r f(p^r x)$	$f^{\wedge}(p^{-r}t)$	$f\in L$
$\overline{f(\ominus x)}$	$\overline{f^{\wedge}(t)}$	$f\in L$
$\overline{f^{\wedge}(x)}$	$\overline{f(t)}$	$f\in L$
$(f\circledast g)(x)$	$f^{\wedge}(t)g^{\wedge}(t)$	$f, g\in L$
$f^{\langle r\rangle}(x)$	$t^r f^{\wedge}(t)$	$f\in L^2$
$(\ominus x)^r f(x)$	$(f^{\wedge}(t))^{\langle r\rangle}$	$f\in L^2$
$\kappa_{[0,1)}(x)$	$\kappa_{[0,1)}(t)$	本章§4例1
$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\kappa_{[k,k+1)}(x)$	$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\overline{w}_j(t), & 0\leqslant t<1\\ 0, & 1\leqslant t<\infty\end{cases}$	本章§4例5
$f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leq x<1\\ 0, & 1\leq x<\infty\end{cases}$	$f^{\wedge}(t)=\begin{cases}1/2, & 0\leqslant t<1,\\ -A_j p^{-k}, & jp^{k-1}\leqslant t<jp^{k-1}+1,\ j=1,\cdots,p-1,\ k=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{对其余的 } t.\end{cases}$	本章§4例6

§5* 乘法直交核

为了对 Fourier 变式、Walsh 变式等有一个统一的了解，我们将从乘法直交核的角度来进行讨论（参看[12]俄译本的附录）。在这里能建立有关最佳逼近、收敛的基本定理，特别是建立推广的 Parseval 公式。由于证明的方法不依赖于以前的结果，故作为推论，我们同时证明了关于 $L^2_{[0,\infty)}$ 中 W 变式的 Parseval 公式。

大家知道，在区间 $I=[a,b]$ 的长度 $mI=b-a$ 的基础上怎样定义 **Lebesgue 测度**。如果给定一个非减右连续函数 $\mu(x)$，将区间 I 的"长度"规定为

$$mI=\mu(b)-\mu(a-0), \tag{6.41}$$

一点 c 的测度规定为

$$m\{c\}=\mu(c)-\mu(c-0)。$$

在此基础上，象定义 Lebesgue 测度那样，可以定义更一般的测度，称为 **Lebesgue-Stieltjes** 测度（简称 LS 测度），它也具有测度的基本性质，如非负性与完全可加性等。以 LS 测度为基础定义的积分称为 **LS 积分**[35]。$[0,\infty)$ 上 LS 可测函数 $f(x)$ 关于非减函数 $\mu(x)$ 的 LS 积分记成

$$\int_0^\infty f(x)d\mu(x)。 \tag{6.42}$$

用记号 L_μ 表示一切 LS 可积函数类，L^2_μ 表示一切 LS 平方可积函数类。

下面假定 $\mu(x)$，$\nu(x)$ 为两个给定的非减右连续函数，两者定义域分别是 $[a,b)$ 与 $[A,B)$（代替区间可以考虑一般的一维 LS 可测集，为书写简单起见，不再引用其他记号）。

标准直交核 设$\varphi(x, y)$是$(a, b; A, B)$上的非零二元函数，如果它满足下列两个条件：

(i) 对于任何有限ν测度集Δ，函数

$$\omega(x, \Delta)=\int_{\Delta}\varphi(x, y)d\nu(y) \tag{6.43}$$

属于L_{μ}^2，而函数

$$\int_{\Delta}|\varphi(x, y)|^2 d\nu(y) \tag{6.44}$$

在一切有限μ测度集Δ上可积；

(ii) 对任何两个ν有限测度集Δ_1, Δ_2，有

$$\int_a^b \omega(x, \Delta_1)\overline{\omega}(x, \Delta_2)d\mu(x)=\nu(\Delta_1\cap\Delta_2); \tag{6.45}$$

则称$\varphi(x, y)$为关于测度$d\mu$、$d\nu$的**标准直交核**。

此外，如果除了(i)与(ii)，还满足

(iii) 对任何两个有限μ测度集Δ_1, Δ_2，有

$$\int_A^B \xi(\Delta_1, y)\overline{\xi}(\Delta_2, y)d\nu(y)=\mu(\Delta_1\cap\Delta_2), \tag{6.46}$$

其中

$$\xi(\Delta, y)=\int_{\Delta}\varphi(x, y)d\mu(x),$$

则称标准直交核$\varphi(x, y)$为**完整的**。

如果x, y的定义域相同，当$\varphi(y, x)=\varphi(x, y)$时，称$\varphi$是**对称核**。

例 1 可以验明，定义在$[0, 1)$上的函数系$\{e^{2\pi inx}\}$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$为标准直交核。

其实，在这里$[a, b)=(0, 1)$，$(A, B)=(-\infty, \infty)$，$d\mu$为通常的L测度，而测度$d\nu$的意义规定如下：设E为任一个一维点集，N为整数集，则E的ν测度定义为

$$m_{\nu}(E)=(E\cap N)\text{的基数。}$$

例如，当 $E=\{0, 1\}$ 时，$m_\nu(E)=2$；$E=(-2,5]$ 时，$m_\nu(E)=7$。（可以引入适当的函数 $\nu(x)$ 达到同一目的。）

我们来验证条件被 (i)，(ii) 满足，关于 (i)，设 Δ 为有限 ν 测度集，其中所含的整数为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$，则

$$\omega(x, \Delta)=\int_\Delta \varphi(x, y)d\nu(y)=\sum_{k=1}^{r}\varphi(x, n_k)=\sum_{k=1}^{r}e^{2\pi i n_k x},$$

它显然属于 $L^2_{[0,1)}$，而函数 $\int_\Delta |\varphi(x, y)|^2 d\nu(y)=r$ 显然在一切有限 μ 测度集上可积，从而(i)满足。再设 Δ_1, Δ_2 为两个 ν 有限测度集，它所含整数集分别是

$$N'=\{n'_1, \cdots, n'_r\} \quad 与 \quad N''=\{n''_1, \cdots, n''_s\},$$

那么

$$\int_0^1 \omega(x, \Delta_1)\overline{\omega}(x, \Delta_2)d\mu(x)$$

$$=\int_0^1 \sum_{k=1}^{r} e^{2\pi i n'_k x} \sum_{j=1}^{s} e^{-2\pi i n''_j x}dx,$$

据直交性，右边等于集 $N'\cap N''$ 的元素的个数，亦即等于 $\nu(\Delta_1\cap\Delta_2)$，因此条件 (ii) 满足。还可以验证条件 (iii) 也满足。

作为习题，试证定义在$[0, 1)$上的 W 函数系 $w_n(x)$，$n=0, 1, \cdots$ 为标准直交核。

例 2 定义于$(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$上的函数 $\varphi(x, y)=e^{2\pi ixy}$ 为关于测度 $d\mu(x)=dx$，$d\nu(y)=dy$ 的标准直交核，且为完整的。

其实，对任何有限测度集 Δ，

$$\omega(x, \Delta)=\int_\Delta e^{2\pi ixy}dy$$

属于 $L^2_{(-\infty,\infty)}$，这是由于当 $x\to\infty$ 时，$\omega(x, \Delta)=0(1/x)$，又函数

$$\int_{\Delta}|\varphi(x,\ y)|^2 d\nu(y)=\int_{\Delta}dy=m\Delta$$

显然在一切有限测度集上可积。其次，对任何两个有限测度集 Δ_1, Δ_2,关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\Delta_1}e^{2\pi ixy}dy\right\}\left\{\int_{\Delta_2}e^{-2\pi ixy}dy\right\}dx=m(\Delta_1\cap\Delta_2)$$

成为广义 Parseval 公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\kappa^{\wedge}_{\Delta_1}(y)\overline{\kappa^{\wedge}_{\Delta_2}(y)}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\kappa_{\Delta_1}(x)\overline{\kappa}_{\Delta_2}(x)dx,$$

因而条件(i)与(ii)均满足。由于核关于变元 x 与 y 的对称性，条件(6.46)归结为广义 Parseval 公式，故核是完整核。

例 3 广义 W 函数

$$\varphi(x,\ y)=e^{\frac{2\pi i}{p}(x\ominus y)}=w(x,\ y),\quad 0\leqslant x,\ y<\infty$$

关于测度 dx, dy 为完整的标准直交核。

其实，对任何有限区间 $\Delta=(a,\ b)$，由本章 §4 例 4 可知

$$\omega(x,\ \Delta)=\int_{\Delta}\varphi(x,\ y)dy=0(1/x),\quad x\to\infty,$$

故 $\omega(x,\ \Delta)\in L^2_{[0,\infty)}$，从而对任何有限测度集 Δ 亦然。又函数 $\int_{\Delta}|\varphi(x,\ y)|^2dy=m\Delta$ 在一切有限测度集上可积，故(i)成立。性质(ii)，(iii)均为关于特征函数的 Parseval 公式(参看本章 §2 定理 4，它的证明用不着(ii)与(iii))。

现在列举标准直交核的若干性质。

定理 1 设 $f\in L^2_{\mu}$，Δ 为某一有限 ν 测度集。设 $\varphi(x,\ y)$ 为关于测度 $d\mu$、$d\nu$ 的标准直交核(不要求完整)，则在形如

$$\int_{\Delta}^{B}\psi(y)\varphi(x,\ y)d\nu(y)\qquad(6.47)$$

的函数中，最佳平方逼近 $f(x)$ 的那个函数为

$$\psi^*(y)=\begin{cases}\int_a^b f(x)\overline{\varphi}(x,\ y)d\mu(x), & 当\ y\in\Delta,\\ 0, & 当\ y\overline{\in}\Delta.\end{cases}$$

这里 $\psi(y)$ 在 Δ 外为 0。

证 据标准直交核的性质，求得

$$\int_a^b\left|f(x)-\int_A^B\psi(y)\varphi(x,\ y)d\nu(y)\right|^2 d\mu(x)$$

$$=\int_a^b|f(x)|^2d\mu(x)-2\operatorname{Re}\int_a^b f(x)\int_A^B\overline{\psi}(y)\overline{\varphi}(x,\ y)d\nu(y)d\mu(x)$$

$$+\int_A^B|\psi(y)|^2d\nu(y)$$

$$=\|f\|^2_{L^2_\mu}+\|\psi\|^2_{L^2_\nu}-2\operatorname{Re}\int_A^B\overline{\psi}(y)\psi^*(y)d\nu(y)$$

$$=\|f\|^2_{L^2_\mu}+\|\psi-\psi^*\|^2_{L^2_\nu}-\|\psi^*\|^2_{L^2_\nu},$$

由于当 $f(x)$ 给定时，$\psi^*(y)$ 随之而定，欲上式达到最小，必然第二项为 0，亦即 $\psi(y)\sim\psi^*(y)$。这正表明

$$\int_A^B\psi^*(y)\varphi(x,\ y)d\nu(y)$$

与 $f(x)$ 有最佳平方逼近。

下面讨论一个收敛定理。为了确定起见，假定核的定义域是 $(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$。

定理 2 设 $\varphi(x,\ y)$ 为关于测度 $d\mu,\ d\nu$ 的标准直交核，$g(y)$ 为当 $y\to\infty$ 时单调趋于 ∞ 的函数，则对于任何使积分

$$\int_0^\infty|\psi(y)|^2g(y)d\nu(y)$$

收敛的函数 $\psi(y)$，当 $n\to\infty$ 时，序列

$$S(x,\ r_n)=\int_0^{r_n}\psi(y)\varphi(x,\ y)d\nu(y)$$

的极限几乎处处存在，这里数列 r_n 选其满足 $n\leqslant g(r_n)<n+1$。

证 考察函数$\psi(y)$的逆变式

$$f(x)=\int_0^\infty \psi(y)\varphi(x, y)\,d\nu(y),$$

其中$\int_0^\infty$依平均收敛意义。我们有

$$\int_0^\infty |f(x)-S(x, r_k)|^2 d\mu(x)=\int_{r_k}^\infty |\psi(y)|^2 d\nu(y),$$

从而

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty |f(x)-S(x, r_k)|^2 d\mu(x)=\sum_{k=1}^\infty \int_{r_k}^\infty |\psi(y)|^2 d\nu(y)$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\int_{r_k}^{r_{k+1}} k|\psi(y)|^2 d\nu(y)+\lim_{N\to\infty} N\int_{r_N}^\infty |\psi(y)|^2 d\nu(y)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N-1}\int_{r_k}^{r_{k+1}} |\psi(y)|^2 g(y)d\nu(y)+\lim_{N\to\infty}\int_{r_N}^\infty |\psi(y)|^2 g(y)d\nu(y)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{r_k}^{r_{k+1}} |\psi(y)|^2 g(y)\,d\nu(y)=\int_{r_1}^\infty |\psi(y)|^2 g(y)d\nu(y)<\infty。$$

故$\sum|f(x)-S(x, r_k)|^2$几乎处处收敛，更有$f(x)-S(x, r_k)$几乎处处收敛于0，即当$k\to\infty$时，几乎处处有$S(x, r_k)\to f(x)$。定理证毕。

前面已经提到，指数型核，W函数以及广义W函数都是标准直交核。这类核还有一个重要特点，即属于所谓**乘法核**之中。这样，分析中直交核的概念就与代数中群的特征概念密切地联系起来了。

乘法核 称核函数$\varphi(x, y)$为**乘法的**，如果对每个$y\in(A, B)$，$\varphi(x, y)$不几乎处处为零，下述条件满足：

对于任何y_1，$y\in(A, B)$，可求得$y_2\in(A, B)$，使

$$\varphi(x, y)\varphi(x, y_2)=\varphi(x, y_1) \tag{6.48}$$

至多除去y的一个零测度集以外处处成立。

如果核 $\varphi(x, y)$ 既是标准直交核，又是乘法核，则称 $\varphi(x, y)$ 为**乘法标准直交核**。

例 W 系 $\{w_k(x)\}$, $k=0, 1, 2, \cdots$, 是乘法核，这里

$$[a, b)=[0, 1), (A, B)=\{0, 1, 2, \cdots\},$$

乘法核的条件对这个系无例外地满足。

广义 W 函数 $w(x, y)$ $(0\leqslant x, y<\infty)$ 也是乘法核。

还有，Fourier 分析中的指数函数核 $e^{2\pi inx}(0\leqslant x<1$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 与 $e^{2\pi ixy}(-\infty<x, y<\infty)$ 均为乘法核。

显然，所有上面提到的核都是乘法直交核。

对于含有可列个(或有限个)元素的乘法核，我们证明

定理 3 设 $S=\{\varphi_k(x)\}$, $k=0, 1, 2, \cdots$, $x\in(a, b)$, 为乘法核，且存在常数 $M\neq 0$ 使

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|dx\leqslant M, \quad k=0, 1, 2, \cdots, \tag{6.49}$$

那么有

(i) 对任何整数 r, $(\varphi_k(x))^r\in S$;

(ii) $|\varphi_k(x)|=1$(对每个 k)几乎处处成立；

(iii) $\bar{\varphi}_k(x)\in S$, 且 $[\varphi_k(x)]^{-1}=\bar{\varphi}_k(x)$, $k=0, 1, 2, \cdots$。

证 取 $\varphi_0\in S$, 由乘法核的条件知存在 $\psi\in S$, 使

$$\varphi_0\psi=\varphi_0。$$

从而 $\psi(x)=1\in S$。对于 S 中的元 1 与 φ_k, 考察方程

$$\varphi_k\psi=1。$$

仍由乘法核的条件知 $\psi=\varphi_k^{-1}\in S$。一般地，考察方程

$$\varphi_k^{-1}\psi=\varphi_k^{r-1}, \quad r=1, 2, \cdots,$$

据归纳法便可推出 $\psi=\varphi_k^r$ 均属于 S, $r=0, 1, 2, \cdots$。

同法，考察方程

$$\varphi_k\psi=\varphi_k^{-r+1}, \quad r=1, 2, \cdots,$$

又可推知一切 $\psi=\varphi_k^{-r}$ 均属于 S，$r=1, 2, \cdots$，结论(i)证毕。

为证(ii)，设 α 为大于 1 的任一常数，令

$$E=\{x\in(a,b):|\varphi_k(x)|>\alpha\}。$$

若 $mE>0$，由于(i)，$\varphi_k^{2r}(r=0, 1, 2, \cdots)$全都属于 S，将有

$$\int_a^b|\varphi_k(x)|^{2r}dx\geqslant\alpha^{2r}mE\to\infty,$$

这与假设条件(6.49)相矛盾，故 $mE=0$，因而集

$$\{x\in(a,b):|\varphi_k(x)|>1\}$$

的测度为 0。同法可证，集 $\{x\in(a,b):|\varphi_k(x)|<1\}$ 的测度为 0 (利用 $\varphi_k^{-2r}\in S$)。这样，集

$$\{x\in(a,b):|\varphi_k(x)|\neq1\}$$

的测度为 0，(ii)证毕。

最后证明(iii)。由(ii)知 $|\varphi_k(x)|^2=1$ (除去一个零测度集外)，即

$$\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}=1,$$

由于 φ_k, 1 均属于 S，故据乘法核的条件知

$$\overline{\varphi}_k(x)=[\varphi_k(x)]^{-1}\in S。$$

结论(iii)证毕。

我们对乘法核作一点说明。假定(A, B)代表一个群 G，G 的运算为 $\circ$，$\varphi(x, y)$为核函数，$y\in G$。可以将等式(6.48)改述成：对于任何 $y_1, y_2\in G$ 存在 $y\in G$ 且 $y=y_1\circ y_2$ 满足

$$\varphi(\cdot, y_1)\varphi(\cdot, y_2)=\varphi(\cdot, y), \tag{6.50}$$

那么容易验明，Fourier 分析中的指数函数系

$$\{e^{2\pi ixy}: y\in(-\infty, \infty)\}, \{e^{2\pi ikx}: k=0, \pm1, \cdots\}$$

与 W 分析中的函数系 $\{w_k(x): k=0, 1, \cdots\}$ 与 $\{w(x, y): y\in[0, \infty)\}$ 均是乘法直交核。转移到群的语言，由于 φ 是同态，从而群 G 在同态下的象$\{\varphi(\cdot, y): y\in G\}$构成群(参看第一

章§3定理1)。如果核是对称的，则(6.50)还表明φ是群G上的特征，而第一章§3定理2又指出，群G的一切特征构成群。这样粗略地看出，乘法核与群的特征群有紧密的联系。由此可见，乘法核具有重要的意义。令

$$D_\gamma(x)=\int_0^\gamma \varphi(x, u)d\nu(u), \tag{6.51}$$

$$S_\gamma(f; x)=\int_0^\infty f(t)D_\gamma(t\circ x^{-1})d\nu(t), \tag{6.52}$$

若存在数列$\gamma_k \nearrow \infty$，使对任何有限区间Δ上特征函数f，$S_{\gamma_k}(f; x)$几乎处处有界地收敛于$f(x)$(指S_{γ_k}与k无关地有界且$S_{\gamma_k}(f; x)$几乎处处收敛于$f(x)$)，则称乘法核$\varphi(x, y)$为**D型核**。可以证明，$\{e^{2\pi ixy}: x, y\in(-\infty, \infty)\}$，$\{w(x, y): x, y\in[0, \infty)\}$关于$\mu(x)=\nu(x)=x$均为D型核，且显然均是对称的。

现在对D型乘法核建立一个基本结果，即Parseval-Plancherel公式作为结束。这个公式在前面曾多次提到过。

当$\varphi(\cdot, y)$为特征时，$\overline{\varphi}(\cdot, y)=\varphi(\cdot, y^{-1})$，因此关于乘法核的条件(6.50)可以改写成

$$\varphi(\cdot, y_1)\overline{\varphi}(\cdot, y_2)=\varphi(\cdot, y_1\circ y_2^{-1}), \tag{6.53}$$

这便于下面应用。

定理4 设$\varphi(x, y)$，$x, y\geqslant 0$，为对称的乘法核，且是D型核。设$f\in L^2_\mu$，则积分

$$\int_0^\infty f(x)\overline{\varphi}(x, y)d\mu(x)$$

平均收敛于L^2_ν中的一个元$f^\wedge(y)$，且有：在L^2_μ意义下，

$$f(x)=\int_0^\infty f^\wedge(y)\varphi(x, y)d\nu(y), \tag{6.54}$$

与Parseval-Plancherel公式成立：

$$\int_0^\infty |f^\wedge(y)|^2 d\nu(y) = \int_0^\infty |f(x)|^2 d\mu(x)。 \qquad (6.55)$$

证 分四步进行。

第一步 证明(6.55)对任何于无穷远的邻域为 0 的阶梯函数 $S(x)$ 成立。令

$$S^\wedge(u) = \int_0^\infty S(x)\varphi(x, u)d\mu(x),$$

我们有

$$\int_0^{r_k} |S^\wedge(u)|^2 d\nu(u) = \int_0^{r_k} d\nu(u)\left\{\int_0^\infty S(x)\overline{\varphi}(x,u)d\mu(x)\right.$$

$$\left.\int_0^\infty S(x')\varphi(x', u)d\mu(x')\right\}$$

$$= \int_0^\infty S(x')\left\{\int_0^\infty S(x)\int_0^{r_k}\varphi(x'\circ x^{-1}, u)d\nu(u)d\mu(x)\right\}d\mu(x')$$

$$= \int_0^\infty S(x')\left\{\int_0^\infty S(x)D_{r_k}(x'\circ x^{-1})d\mu(x)\right\}d\mu(x')。$$

由于 $\varphi(x, y)$ 为 D 型核，故上式 { } 中的积分几乎处处有界收敛于 $S(x')$。又因上式两个无穷积分实际上均为有穷积分，故据 L 控制收敛定理，便得

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{r_k} |S^\wedge(u)|^2 d\nu(u) = \int_0^\infty S(x')S(x')d\mu(x')$$

$$= \int_0^\infty |S(x)|^2 d\mu(x),$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r |S^\wedge(u)|^2 d\mu(x) = \int_0^\infty |S(x)|^2 d\mu(x), \quad (6.56)$$

即公式 (6.55) 对于任何于无穷远点邻域为 0 的阶梯函数成立。

第二步 引进 $f\in L_\mu^2$ 的变式 $f^\wedge$。

设 $f\in L_\mu^2$，令

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\leqslant N, \\ 0, & |x|>N, \end{cases} \tag{6.57}$$

我们有

$$\begin{aligned} f_N^\wedge(u) &= \int_{|x|<\infty} f_N(x)\overline{\varphi}(x,u)d\mu(x) \\ &= \int_{|x|<N} f(x)\overline{\varphi}(x,u)d\mu(x), \end{aligned}$$

对每一固定的 N，取阶梯函数列 $S_\gamma(x)$，于 $|x|>N$ 为 0 者，使适合

$$\lim_{\gamma\to\infty}\|f_N-S_\gamma\|_{L_\mu^2}=0。$$

则据 Fatou 定理

$$\|f_N^\wedge\|\leqslant \underline{\lim}_{\gamma\to-\infty}\|S_\gamma^\wedge\|=\lim_{\gamma\to\infty}\|S_\gamma\|=\|f_N\|, \tag{6.58}$$

从而 $f_N^\wedge\in L_\mu^2$，并且对于任何 $p=1, 2, \cdots$，有

$$\|f_N^\wedge-f_{N+p}^\wedge\|=\|(f_N-f_{N+p})^\wedge\|\leqslant\|f_N-f_{N+p}\|\to 0,\quad N\to\infty。$$

故 $\{f_N^\wedge\}$ 是 L_ν^2 中的基本列。据空间 L_ν^2 的完备性，存在一个元 $f^\wedge\in L_\nu^2$，适合 $\|f_N^\wedge-f^\wedge\|\to 0$，$N\to\infty$。

这样，$f^\wedge(u)$ 便确定了，我们把它表为

$$f^\wedge(u)=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{|x|<N} f(x)\overline{\varphi}(x,u)d\mu(x)。 \tag{6.59}$$

显然，对任何数列 $\alpha_k\to\infty$，α_k 不必为整数，$f_{\alpha_k}^\wedge$ 与 $f_N^\wedge$ 有同一极限（参看(6.58)）。因此，(6.59)确定的 $f^\wedge(u)$ 是唯一的，其中 N 未必为整数。此外，当 $f(x)$ 还属于 L_μ 时，(6.59) 与本章§2 的定义是一致的。

第三步　对 $f\in L_\mu^2$ 证明(6.55)。

设 $f\in L_\mu^2$，$f^\wedge$ 由(6.59)定义，在(6.54)中，令 $N\to\infty$ 得

$$\|f^\wedge\|\leqslant\|f\|。 \tag{6.60}$$

为获得公式(6.55)，取阶梯函数列（于无穷远点邻域为 0 者）

S_γ，适合 $\|f-S_\gamma\|\to 0$。由此有 $\|S_\gamma\|\to\|f\|$。据(6.60)

$$\|f^\wedge - S_\gamma^\wedge\| = \|(f-S_\gamma)^\wedge\| \leqslant \|f-S_\gamma\|,$$

故 $\|S_\gamma^\wedge\|\to\|f^\wedge\|$。前面已证明，$\|S_\gamma^\wedge\| = \|S_\gamma\|$，因此$\|S_\gamma\|\to\|f\|$。但 $\|S_\gamma\|\to\|f\|$，从而有

$$\|f^\wedge\| = \|f\|,$$

即(6.55)证毕。

在证明 (6.55) 之后，容易证明广义 Parseval-Plancherel 公式成立，就是说，当 $f, g\in L_\mu^2$ 时，有广义 Parseval-Plancherel 公式

$$\int_{|x|<\infty} f(x)\bar{g}(x)d\mu(x) = \int_{|u|<\infty} f^\wedge(u)\overline{g^\wedge(u)}d\nu(u)。\quad (6.61)$$

其实，$f+g$ 的变式为 $f^\wedge+g^\wedge$. 因而据(6.55)，得

$$\int_{|x|<\infty} |f(x)+g(x)|^2 d\mu(x) = \int_{|u|<\infty} |f^\wedge(u)+g^\wedge(u)|^2 d\nu(u),$$

展开它，并注意 $\|f\| = \|f^\wedge\|$，$\|g\| = \|g^\wedge\|$，有

$$\mathrm{Re}\int f\bar{g}d\mu = \mathrm{Re}\int f^\wedge\overline{g^\wedge}d\nu。$$

在上面推导中，把 g 换成 ig，可得

$$\mathrm{Im}\int f\bar{g}d\mu = \mathrm{Im}\int f^\wedge\overline{g^\wedge}d\nu,$$

合并上述两个等式即得(6.61)。

第四步　(6.54)的证明。

既然已证明 $f^\wedge\in L_\nu^2$，便有 L_μ^2 中的一个元 $g(x)$，使

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|u|<N} f^\wedge(u)\varphi(x,u)d\nu(u) = g(x) \quad (6.62)$$

从而

$$\int_0^x g(\lambda)d\mu(\lambda)=\int_0^x d\mu(\lambda)\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_{|u|<N} f^\wedge(u)\varphi(\lambda,u)d\nu(u)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^x d\mu(\lambda)\int_{|u|<N} f^\wedge(u)\varphi(\lambda,u)d\nu(u)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{|u|<N} f^\wedge(u)D_x(u)d\nu(u), \qquad (6.63)$$

其中(利用核的对称性)

$$D_x(u)=\int_0^x \varphi(\lambda,u)d\mu(\lambda)=\int_0^\infty \kappa_{(0,x)}(\lambda)\varphi(\lambda,u)d\mu(\lambda)$$

属于 L_ν^2。从而 $f^\wedge(u)D_x(u)\in L_\nu$。故积分(6.63)可写成

$$\int_0^x g(\lambda)d\mu(\lambda)=\int_{|u|<\infty} f^\wedge(u)D_x(u)d\nu(u)。 \qquad (6.64)$$

由于特征函数 $\kappa_{(0,x)}(\lambda)$ 的变式

$$\int_{|\lambda|<\infty}\kappa_{(0,x)}(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda,u)d\mu(\lambda)=\overline{\int_0^x \varphi(\lambda,u)d\mu(\lambda)}$$

$$=\overline{D_x(u)},$$

于是(6.64)右边应等于(据(6.61))

$$\int_{|\lambda|<\infty} f(\lambda)\kappa_{(0,x)}(\lambda)d\mu(\lambda)=\int_0^x f(\lambda)d\mu(\lambda)。$$

这样得到

$$\int_0^x g(\lambda)d\mu(\lambda)=\int_0^x f(\lambda)d\mu(\lambda)。$$

由此据 LS 积分理论可知，关于测度 $d\mu$，几乎处处有 $f(x)=g(x)$，即集 $\{x:f(x)\neq g(x)\}$ 为 μ 零测度集，参看(6.62)。定理全部证毕。

定理 4 给我们提供关于对称乘法核的一些基本结论。值得注意的是，它没有利用核的完整性假设而把 Parseval-Plancherel 公式作为乘法核的一个推论。

§6* 一类极值问题

作为 W 变式与逻辑导数的应用，我们简要地介绍一类极值问题。

设 q 为非负整数，$0\leqslant\alpha<1$。n 为一整数并满足 $n>q+\alpha+\frac{1}{2}$。$\varphi(x)$ 定义在 $[0,\infty)$ 上，并有依 L^2 意义的直到 n 阶的逻辑导数。此外，还设 $\varphi(x)$ 于某个有限区间 $[0,\gamma]$ 之外处处为 0。一切这样的函数 $\varphi(x)$ 所成的类记为 $\Phi=\Phi_{n,\gamma}$。考虑由 $\varphi\in\Phi$ 产生的 W 变式

$$T(t)\equiv T(t;\varphi)=\int_0^\infty\varphi(x)\overline{w}(x,t)dx$$
$$=\int_0^\gamma\varphi(x)\overline{w}(x,t)dx。\qquad(6.65)$$

我们要讨论的是下述极值问题

$$c=\inf_{\varphi\in\Phi}\int_0^\infty\mu(t)|T(t)|^2dt,\qquad(6.66)$$

这里 $\varphi\in\Phi$ 满足约束条件

$$\|\varphi\|_2=\|T\|_2=1,\qquad(6.67)$$

$\mu(t)$ 为给定的非负权函数，局部有界，并满足

$$\mu(t)=0(t^{2n})\quad(t\to0),\qquad(6.68)$$

$$\mu(t)=0(t^{q+\alpha})\quad(t\to\infty)。\qquad(6.69)$$

为解决这个极值问题，首先建立几条引理。

引理 1 极值 c 为有限数，即

$$0\leqslant c<\infty。$$

为证此引理，只须在类 Φ 中取一函数 $\varphi_0(x)$，使对 $\varphi_0(x)$ 有

$$\int_0^{\infty}\mu(t)|T(t;\ \varphi_0)|^2dt<\infty。$$

事实上，令

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}p^{N/2}, & 0\leqslant x<p^{-N},\\ 0, & x\geqslant p^{-N},\end{cases}$$

其中N为满足$p^{-N}<r$的正整数。显然$\varphi_0(x)$定义在$[0,\infty)$上并在$[0,\gamma]$之外处处为0，且$\varphi_0\in L^2_{[0,\infty)}$。于是$\varphi_0^{\wedge}\in L^2_{[0,\infty)}$（见本章§3）。如果我们能够证明，$\varphi_0^{\wedge}$在正实轴上某个有限区间之外恒为0，便可利用本章§3性质2°得出φ_0有直到n阶的逻辑导数。可是，

$$\begin{aligned}T(t)&=\int_0^{p^{-N}}p^{N/2}\overline{w}(x,\ t)dx=p^{N/2}\int_0^{p^{-N}}\overline{w}(x,\ t)dx\\&=p^{N/2}\int_0^{p^{-N}}\overline{w}(x,\ [t])dx=p^{N/2}\cdot p^{-N}\int_0^1\overline{w}(yp^{-N},\ [t])dy\\&=p^{-N/2}\int_0^1\overline{w}(y,\ p^{-N}[t])dy,\end{aligned}$$

当$[t]\geqslant p^N$时，由W函数的直交性得$T(t)=0$。

这样，$\varphi_0\in\Phi$，并且显然有$\|\varphi\|_2=\|T\|_2=1$，再据权函数$\mu(t)$所应满足的条件(6.68)知

$$\int_0^{\infty}\mu(t)|T(t;\ \varphi_0)|^2dt<+\infty。\qquad 证毕。$$

有了引理1，便可保证所提的极值问题的解有意义。

利用证明引理1类似的方法，不难验证函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}w(k;\ x), & 当\ j/p^m\leqslant x<j+1/p^m\ 时,\\ 0, & 其他\ x,\end{cases}\tag{6.70}$$

存在依$L^2_{[0,\infty)}$意义的任意阶逻辑导数，其中$m,\ k,\ j$均为任意整数，且$k,\ j\geqslant0$。因此$\varphi\in\Phi$。

我们将要证明的引理2，即变分引理，在解决极值问题时

是一个关键性的引理。

引理 2 设实数 $\gamma>0$，函数 $B(y)\in L_{[0,\gamma]}$，若对于任意的 $\psi\in\Phi$ 都有

$$\int_0^\gamma B(y)\psi(y)dy=0, \tag{6.71}$$

则 $B(y)$ 必几乎处处为 0：$B(y)\sim 0$，$y\in(0,\gamma)$。

证 将 γ 表成 p 进数

$$\gamma=\gamma_{-\nu}p^{\nu}+\gamma_{-\nu+1}p^{\nu-1}+\cdots+\gamma_{-1}p_0+\gamma_0+\gamma_1p^{-1}$$
$$+\gamma_2p^{-2}+\cdots=[\gamma]+\{\gamma\},$$
$$\gamma_j\in\{0,1,\cdots,p-1\},$$
$$j=-\nu,-\nu+1,\cdots,0,1,2,\cdots, \tag{6.72}$$

这里 $[\gamma]$ 与 $\{\gamma\}$ 分别表示 γ 的整数部分与小数部分。

设 $[\gamma]=N>1$。由于 (6.71) 对一切 $\psi\in\Phi$ 都成立，故可分别对 $k=0,1,2,\cdots$，取

$$\psi(y)=\begin{cases}w(k,y), & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他 } y,\end{cases} \tag{6.73}$$

它们恰是(6.70)中当 $m=0$，$j=0$，$k=0,1,2,\cdots$ 的情形。于是假设条件(6.71)化为

$$0=\int_0^\gamma B(y)\psi(y)dy=\int_0^1 B(y)w(k,y)dy$$
$$+\int_1^\gamma B(y)\cdot 0\cdot dy=\int_0^1 B(y)w(k,y)dy,$$
$$k=0,1,2,\cdots。$$

由 p 进 W 系的完整性立即得 $B(y)\sim 0$ 在 $0<y<1$ 中成立。

这样，假设条件(6.71)化为

$$\int_1^\gamma B(y)\psi(y)dy=0。 \tag{6.71$_1$}$$

再分别对 $k=0,1,2,\cdots$ 取

$$\psi(y)=\begin{cases} w(k,\ y), & 1\leqslant y<2, \\ 0, & \text{其他 } y, \end{cases} \tag{6.74}$$

它们正是(6.70)中当 $m=0,\ j=1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 的情形。于是$(6.71)_1$成为

$$\begin{aligned} 0&=\int_1^\gamma B(y)\psi(y)dy=\int_1^2 B(y)w(k,\ y)dy \\ &\quad+\int_2^\gamma B(y)\cdot 0\cdot dy=\int_1^2 B(y)w(k,\ y)dy \\ &=\int_0^1 B(y_1+1)w(k,\ y_1+1)dy_1 \\ &=\int_0^1 B(y_1+1)w(k,\ y_1)dy_1, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \end{aligned}$$

这最后一步是由于 W 函数的周期性。

同样由 W 系的完整性得 $B(y_1+1)$ 在 $0<y_1<1$ 中几乎处处为0，亦即 $B(y)$ 在 $1<y<2$ 中几乎处处为0。

如此继续下去，由归纳法便得

$$B(y)\sim 0 \quad \text{在 } 0<y<[\gamma] \text{ 中成立},$$

同时假设条件(6.71)化为

$$\int_{[\gamma]}^\gamma B(y)\psi(y)dy=0_{\circ} \tag{6.71$_2$}$$

若 $\gamma=[\gamma]$，则引理得证；若 $\gamma\neq[\gamma]$，在 γ 的整数部分作完之后，再来做小数部分。我们不再重复类似的步骤，只指出，当

$$B(y)\sim 0 \quad \text{在 } 0<y<[\gamma]+\gamma_{-1}p^{-1}+\cdots+\gamma_s p^{-s} \text{ 中成立}$$

得证之后，假设条件$(6.71)_2$化为

$$\int_{[\gamma]+\gamma_1 p^{-1}+\cdots+\gamma_s p^{-s}}^\gamma B(y)\psi(y)dy=0_{\circ} \tag{6.71$_3$}$$

令 $\Gamma=[\gamma]+\gamma_1 p^{-1}+\cdots+\gamma_s p^{-s}$，而且再取

$$\psi(y)=\begin{cases} w(p^{s+1}k,\ y), & \text{当 } \Gamma\leqslant y<\Gamma+p^{-s-1},\\ 0, & \text{其他 } y,\end{cases}$$

即(6.70)中当 $m=s+1,\ j=\Gamma p^{s+1},\ k=0,1,2,\cdots$ 的情形，而使$(6.71)_3$化为

$$\begin{aligned}0&=\int_\Gamma^\gamma B(y)\psi(y)dy=\int_\Gamma^{\Gamma+p^{-s-1}}B(y)w(p^{s+1}k,\ y)dy\\&=\int_0^{p^{-s-1}}B(\Gamma+y_1)w(p^{s+1}k,\ y_1)dy_1\\&=p^{-s-1}\int_0^{1}B(\Gamma+p^{-s-1}z)w(p^{s+1}k,\ p^{-s-1}z)dz\\&=p^{-s-1}\int_0^1B(\Gamma+p^{-s-1}z)w(k,z)dz,\end{aligned}$$

由 W 系的完整性得 $B(\Gamma+p^{-s-1}z)\sim0$ 在 $0<z<1$ 中，亦即

$B(y)\sim0$ 在 $\Gamma<y<\Gamma+p^{-s-1}$ 中成立。

按这样的方式作 γ_{s+1} 次，便能得到

$B(y)\sim0$ 在 $\Gamma<y<\Gamma+\gamma_{s+1}p^{-s-1}$ 中成立，

再与前面结果联合起来，就完成了在

$$0<y<[\gamma]+\gamma_1p^{-1}+\cdots+\gamma_sp^{-s}+\gamma_{s+1}p^{-s-1}$$

中 $B(y)\sim0$ 的证明。因而对任何 $S=1,2,3,\cdots$ 都有

$B(y)\sim0$ 在 $0<y<[\gamma]+\gamma_1p^{-1}+\cdots+\gamma_sp^{-s}+\gamma_{s+1}p^{-s-1}$ 中，

故必得有 $B(y)\sim0$ 在 $0<y<\gamma$ 中成立。引理 2 得证。

现在定义一函数

$$K(u)=\int_0^\infty\mu(t)t^{-2n}w(t,\ u)dt,\qquad(6.75)$$

不难验证，$K(u)$ 存在 n 阶逻辑导数，且 $K^{(n)}\in L^2_{[0,\infty)}$，并且依 L^2 意义的逻辑导数 $K^{(n)}$ 与伴随导数 $K_{(n)}$ 相等[30]。

有了这些准备之后，便可得到

定理 1 极值问题(6.66)的解 $\varphi\in\Phi$ 恒满足逻辑微分—

积分方程

$$\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x)K^{(n)}(y\ominus x)dx-\lambda\varphi(x)\sim 0,\quad 0<y<\gamma。$$

证 设 λ 为极值问题(6.66)的最小值，则对任意 $\varphi\in\Phi$ 有

$$\int_0^\infty \mu(t)|T(t)|^2dt-\lambda\geqslant 0, \tag{6.76}$$

利用约束条件(6.67)，上式化为

$$\int_0^\infty \mu(t)|T(t)|^2dt-\lambda\int_0^\infty |T(t)|^2dt\geqslant 0。 \tag{6.77}$$

再设 φ_0 为一最佳元，即极值问题的解，其 W 变式为

$$T_0(t)=\int_0^\gamma \varphi_0(x)\overline{w}(t,x)dx。$$

那么，令 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varepsilon\Psi(x)$，而 $\Psi\in\Phi$，则 ε 的二次函数

$$\begin{aligned}Q(\varepsilon)&=\int_0^\infty \mu(t)|T(t)|^2dt-\lambda\int_0^\gamma |\varphi(t)|^2dt\\&=\int_0^\infty \mu(t)\left|\int_0^\gamma \varphi(x)\overline{w}(t,x)dx\right|^2dt\\&\quad-\lambda\int_0^\gamma|\varphi(t)|^2dt\end{aligned} \tag{6.78}$$

当 $\varepsilon=0$ 时应达到最小值 0，故应有

$$\frac{d}{d\varepsilon}Q(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=0。 \tag{6.79}$$

为展开(6.79)，先将它右边的第一项变形，利用 $\varphi\in\Phi$，据第六章§3 性质 3° 知 $t^nT(t)=t^n\varphi^\wedge(t)\in L^2_{[0,\infty)}$，从而

$$\begin{aligned}Q_1(\varepsilon)&\equiv\int_0^\infty \mu(t)|T(t)|^2dt=\int_0^\infty \mu(t)t^{-2n}|t^nT(t)|^2dt\\&=\int_0^\infty \mu(t)t^{-2n}\left\{\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^N \varphi^{(n)}(x)\overline{w}(x,t)dx\right\}\\&\quad\times\left\{\underset{M\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^M \overline{\varphi^{(n)}(y)w(y,t)}dy\right\}dt,\end{aligned}$$

利用 $\mu(t)t^{-2n}$ 的有界性、$\mu(t)t^{-2n}\in L$、平均收敛必为弱收敛以及 Fubini 定理，可将 $Q_1(\varepsilon)$ 写成

$$
\begin{aligned}
Q_1(\varepsilon) &= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to\infty}}\int_0^\infty \mu(t)t^{-2n} \\
&\quad \times\left\{\int_0^M\int_0^N \varphi^{(n)}(x)\overline{\varphi^{(n)}(y)}w(t,\ y\ominus x)dxdy\right\}dt \\
&= \lim_{\substack{M\to\infty\\N\to\infty}}\int_0^M\int_0^N \varphi^{(n)}(x)\overline{\varphi^{(n)}(y)}\kappa(y\ominus x)dxdy \\
&\equiv \int_0^{\to\infty}\int_0^{\to\infty}\varphi^{(n)}(x)\overline{\varphi^{(n)}(y)}\kappa(y\ominus x)dxdy。
\end{aligned}
$$

其中 κ 由(6.75)给出。于是

$$
\begin{aligned}
Q(\varepsilon) &= Q_1(\varepsilon)-\lambda\int_0^\gamma|\varphi(t)|^2dt \\
&= \int_0^{\to\infty}\int_0^{\to\infty}\{\varphi_0^{(n)}+\varepsilon\psi^{(n)}(x)\}\{\overline{\varphi_0^{(n)}(y)} \\
&\quad +\varepsilon\overline{\psi^{(n)}(y)}\}\kappa(y\ominus x)dxdy-\lambda\int_0^\gamma\{\varphi_0^2(t) \\
&\quad +\varepsilon\varphi_0(t)\overline{\psi}(t)+\varepsilon\overline{\varphi_0}(t)\psi(t)+\varepsilon^2\psi^2(t)\}dt,
\end{aligned}
$$

对上式求 $\dfrac{dQ}{d\varepsilon}$ 并令 $\varepsilon=0$ 得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\to\infty}\int_0^{\to\infty}[\varphi^{(n)}(x)\overline{\psi^{(n)}(y)}+\psi^{(n)}(y)\overline{\varphi_0^{(n)}(x)}]\kappa(y\ominus x)dxdy \\
&\quad -\lambda\int_0^\gamma\{\varphi_0(t)\overline{\psi}(t)+\overline{\varphi_0}(t)\psi(t)\}dt=0,
\end{aligned}
$$

显然 $\bar{\kappa}(x\ominus y)=\kappa(y\ominus x)$，故上式又可简化为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big\{&\int_0^{\to\infty}\int_0^{\to\infty}\kappa(y\ominus x)\varphi_0^{(n)}(x)\overline{\psi^{(n)}(y)}dxdy \\
&-\lambda\int_0^\gamma\varphi_0(y)\overline{\psi}(y)dy\Big\}=0,
\end{aligned}
\tag{6.80}
$$

其中 Re 表示复值的实部。

由于 $\kappa(u)$ 存在 n 阶逻辑导数，并且

$$\kappa^{(n)}(u)\in L^2_{[0,\infty)},\ \kappa^{(n)}(u)=\kappa_{(n)}(u),$$

故

$$\int_0^{\to\infty}\kappa(y\ominus x)\overline{\psi^{(n)}(y)}dy=\int_0^{\to\infty}\kappa_{(n)}(y\ominus x)\psi(y)dy$$

$$=\int_0^{\gamma}\kappa^{(n)}(y\ominus x)\psi(y)dy,$$

代入(6.80)便得

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^{\to\infty}\varphi^{(n)}(x)\left[\int_0^{\gamma}\kappa^{(n)}(y\ominus x)\overline{\psi}(y)dy\right]dx\right.$$

$$\left.-\lambda\int_0^{\gamma}\varphi_0(y)\overline{\psi}(y)dy\right\}=0,$$

但 $\kappa^{(n)}\varphi_0^{(n)}\in L_{[0,\infty)}$，于是再用 Fubini 定理，上式化为

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^{\gamma}\left[\int_0^{\to\infty}\kappa^{(n)}(y\ominus x)\varphi_0^{(n)}(x)dx\right.\right.$$

$$\left.\left.-\lambda\varphi_0(y)\right]\overline{\psi}(y)dy\right\}=0。$$

现在，令 $A(y)\equiv\int_0^{\infty}\kappa^{(n)}(y\ominus x)\varphi_0^{(n)}(x)dx$，则 $A\in L_{[0,\gamma]}$，$\overline{\psi}\in\Phi$，从而由引理 2 即得

$$A(y)-\lambda\varphi(y)\sim 0,\quad y\in(0,\gamma),$$

这就是(6.76)。定理证毕。

还可证明定理 1 中的条件是充分的。我们有

定理 2　方程(6.76)的最小固有值是极值问题(6.65)在类 Φ 中的最小值，而所属的固有元为相应的最佳元(常因子不计)。

它的证明有一部分已包含在定理 1 的推导中，这里不再写出了。

定理 1 与 2 一起表明，逻辑微分-积分方程完全刻划了极值问题的最佳元。

当权函数 $\mu(t)=t^{2n}$, $n=1, 2, \cdots$ 时，极值问题取如下特殊形式

$$c=\inf_{\varphi\in\Phi_{2n}}\int_0^{\infty}t^{2n}|T(t)|^2dt, \tag{6.81}$$

这里 Φ_{2n} 表示一切于 $[0, \gamma]$ 之外为 0 并在 $[0, \infty)$ 上存在依 L^2 意义的直到 $2n$ 阶逻辑导数的函数 $\varphi(x)$ 所成的类，并且满足约束条件

$$\|\varphi\|_2=\|T\|_2=1_{\circ}$$

这时可以直接证明(略)。

定理 3 极值问题(6.81)的最小值为逻辑微分方程

$$\varphi^{(2n)}(x)-\lambda\varphi(x)\sim 0, \quad 0<x<\gamma, \tag{6.82}$$

的最小固有值，而取达极值的最佳元为此方程的相应最小固有值所属的固有元；反之，方程(6.82)的最小固有值是(6.81)的最小值，而相应的固有元为其最佳元(常因子不计)。

从新得结论立即看出，对于这类离散的极值问题的解，可以用逻辑微分-积分方程或逻辑微分方程的固有函数来刻划，而用连续系统中的普通微分方程来刻划是不可能的。

所有结果都已推广到多元情形[34]。

我们给出用逻辑微分方程刻划离散型极值问题解的例。

例 1 设 (α, β 为实数)

$$\varphi(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\leqslant x<1/2,\\ \beta, & 1/2\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

可以求出

$$T(t)=\varphi^{\wedge}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\alpha+\beta), & 0\leqslant t<1,\\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta), & 1\leqslant t<2,\\ 0, & t\geqslant 2_{\circ}\end{cases}$$

当两参数α,β变动时，在条件

$$\|T\|_2=1 \tag{6.83}$$

之下求

$$c(\alpha,\beta)=\inf\int_0^{\infty}t^2|T(t)|^2dt \tag{6.84}$$

的极值（对于$p=2$）。

【解】 对于$0\leqslant x<1$，求出

$$\varphi^{(2)}(x)=\int_0^2 t^2T(t)w(t,x)dt$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}(\alpha+\beta)+\frac{7}{6}(\alpha-\beta)\cdot 1, & 0\leqslant x<1/2,\\ \frac{1}{6}(\alpha+\beta)+\frac{7}{6}(\alpha-\beta)(-1), & 1/2\leqslant x<1。\end{cases}$$

逻辑微分方程(6.82)（对于$\gamma=1$，$n=1$）化为

$$\begin{cases}\frac{1}{6}(\alpha+\beta)+\frac{7}{6}(\alpha-\beta)-c\alpha=0,\\ \frac{1}{6}(\alpha+\beta)-\frac{7}{6}(\alpha-\beta)-c\beta=0,\end{cases}$$

从而极小值c满足方程

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{6}+\frac{7}{6}-c & \frac{1}{6}-\frac{7}{6}\\ \frac{1}{6}-\frac{7}{6} & \frac{1}{6}+\frac{7}{6}-c\end{vmatrix}=0$$

或$\left(\frac{4}{3}-c\right)^2-1=0$，由此知$c=1/3$，而相应的$\alpha,\beta$均等于1（利用条件(6.83)）。

例 2 对于

$$\varphi(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\leqslant x<1/4,\\ \beta, & 1/4\leqslant x<2/4,\\ \gamma, & 2/4\leqslant x<3/4,\\ 0, & x\geqslant 3/4,\end{cases}$$

考虑例 1 中同样问题($p=2$)。

【解】 可以求出(对于 $0\leqslant x<3/4$)

$$\varphi^{\langle 2\rangle}(x)=\int_0^4 t^2\varphi^{\wedge}(t)w(t,x)dt$$

$$=\begin{cases}\frac{16}{3}\alpha-4\beta-2\gamma, & 0\leqslant x<1/4,\\ -4\alpha+\frac{16}{3}\beta+\gamma, & 1/4\leqslant x<2/4,\\ -2\alpha+\beta+\frac{16}{3}\gamma, & 2/4\leqslant x<3/4,\end{cases}$$

逻辑微分方程(6.82)(对于 $\gamma=3/4$, $n=1$)化为

$$\begin{cases}\frac{16}{3}\alpha-4\beta-2\gamma-c\alpha=0,\\ -4\alpha+\frac{16}{3}\beta+\gamma-c\beta=0,\\ -2\alpha+\beta+\frac{16}{3}\gamma-c\gamma=0。\end{cases}\tag{6.85}$$

而极小值 c 满足方程

$$\left(\frac{16}{3}-c\right)^3-21\left(\frac{16}{3}-c\right)+16=0。$$

最小的正根为 $c\approx1.19$,确定 φ 的相应的常数 α, β, γ 可由方程(6.85)及限制条件 $\|\varphi\|_2=1$ 求得,具体数值结果从略。

关于多元情形的数值例子见[34]。

习　　题

1. 在伪乘的定义(6.2)中，能否把 $\prod$ 了解为连伪加或连加？试考察伪乘性质与广义 W 函数的性质。

2. 可积函数的 W 变式在 P 进有理点是否连续？

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\leqslant x<1/4,\\ \beta, & 1/4\leqslant x<2/4,\\ \gamma, & 2/4\leqslant x<3/4,\\ \delta, & 3/4\leqslant x<1,\\ 0, & 1\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

试求 $f^{\wedge}(t)$ (对于 $P=2$)。

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 2\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

试求 $f^{\wedge}(u)$ (对于任意大于 1 的整数 P)。

5. 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1/3,\\ 0, & 1/3\leqslant x<\infty\end{cases}$$

的 W 变式($P=2$)有何特点？

6. 试证定义在(0, 1)上的 W 函数系 $w_n(x)$, $n=0, 1, 2, \cdots$ 构成标准直交核、乘法核，且是完整的。

7. 试证 $e^{2\pi i x y}$ ($-\infty<x, y<\infty$) 为 D 型核。

8. 试证 $e^{\frac{2\pi i}{p}(x\odot y)}$ ($x, y\geqslant 0$) 为 D 型核。

参 考 文 献

[1] Beauchamp, K. G., Walsh functions and their applications, Academic Press, L, N. Y., San Francisco, (1975).

[2] Bramhall, J. N., The first fifty years of Walsh functions "Application of Walsh Function", Proc. Sympos. Naval Res. Lab., (1973), 41—60.

[3] Butzer, P. L., "Application of Walsh Function", Proc. Sympos, Naval Res. Lab., Washington, D. C., (1972), 27—29.

[4] _____, and Wagner, H. J., Appliable Anal., 3 (1973), 29—46.

[5] _____, Anal. Math. I, 3 (1975), 171—196.

[6] _____, and Nessel, R. J., Fourier Analysis and Approximation, Vol. 1 (1970).

[7] Chrestenson, N. E., Pacific J. Math. 5 (1955), 17—31.

[8] Fine, N. J., Tran. Amer. Math. Soc., 65 (1949), 372—414.

[9] _____, ibid., 69 (1950), 66—77.

[10] Harmuth, H. F., Transmission of information by orthogonal functions, Springer-Verlag, (1969), New York.

[11] Kaczmarz, S. Von, Comptes Rendus du Premiers congres des Mathematiciens des Poys Slaves, Warsaw, 189—192.

[12] _____, and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonolrethem, "The Walsh System", Chelsea Publishing Company, New York(1951).

[13] Кокилащвили, В. М., Bull. Acod. Polan. Sei. Ser, Math. Astronom Phys., 13 (1961), 405—410.

[14] Morgenthaler, G. W., Trans. Amer. Math. Soc., 84(1957), 472—507.

[15] Paley, R. E. A. C., Proc-London-Mah. Soc., 2 (1932), 241—279.

[16] Peterson, H. L., "Application of Walsh Function", Proc. Sympos. Naval Res. Lob., (1970), 55—57.

[17] Понтрягин, 连续群,科学出版社 (1955).

[18] Rademacher, H., Math. Annal, 87 (1922), 112—138.

[19] Selfridge, R. G., Pacific J. Math., 5 (1955), 451—480.

[20] Steinhaus, H., and Kaczmarz, S., Studia Math., 2(1930), 231—247.
[21] Swich, D. A., IEEE Tran. I. Theory, Vol. IT-15, No1, Jan 1969, 167.
[22] Watari, C., Tohoku Math. J., 15 (1963), 1—5.
[23] _____, AD 707431, 166—169.
[24] Walsh, J. L., Amer. J. Math., 55 (1923), 5—24.
[25] Yano, S., Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 962—969.
[26] _____, Tohoku Math. J., 3 (1951), 223—242.
[27] _____, ibid, 9 (1957), 267—272.
[28] 胡征,略谈沃尔什函数问题,电子科学技术, 92 (1979 第七期), 5.
[29] 西北电讯工程学院编,沃尔什函数及其应用 (1976).
[30] 郑维行，广义 Walsh 变式与一极值问题，数学学报，22:3 (1979), 362—374.
[31] _____，关于 Walsh 分析的一些问题，逼近论会议论文集，杭州大学出版，(1978), 104—107.
[32] 郑维行、苏维宜、任福贤,关于 Walsh 分析概况,同上，42—50.
[33] 任福贤、苏维宜、郑维行，广义逻辑导数与逼近论若干问题，南京大学学报(自然科学), 3 (1978), 1—7.
[34] 苏维宜,多元W变式与一极值问题,同上，2 (1980),6—14.
[35] 郑维行、王声望,实变函数与泛函分析概要,人民教育出版社 (1980).

索引

一 划

二 划

三 划

伴随逻辑导数(adjoint logical derivative)
完整系(complete system)
完整核(complete kernel)

八　划

拓扑群(topological group)
直交的(orthogonal)
直积(direct product)
卷积(convolution)
卷积公式(convolution formula)
奇偶性(odevity)
范数(norm)

九　划

绝对连续函数(absolute continuous functions)
标准直交系(orthonormal system)
标准直交核(orthonormal kernel)

十　划

特征(character)
特征函数(characteristic function)
特征群(characteristic group)
紧拓扑群(compact topological group)
乘法公式(multiplicative formula)
乘法直交核(multiplicative orthogonal kernel)
乘法核(multiplicative kernel)

十一划

逻辑导数(logical derivative)

逻辑卷积(logical convolution)
逻辑积分(logical integration)
第二乘法公式(second multiplicative formula)

十 二 划

最佳逼近(best approximation)
循环卷积(cyclic convolution)
循环移位(cyclic shift)

十 三 划

群(group)
稠密集(dense set)
数的反演码(inversion-code of number)
置换(permutation)

* * *

Abel 群 (Abel group)
Abel 变换 (Abel transform)
Banach 代数 (Banach algebra)
Banach 空间 (Banach space)
Bessel 不等式 (Bessel inequality)
Cauchy 不等式 (Cauchy inequality)
Cauchy 序列 (Cauchy sequence)
D 点 (*D*-point)
Dini-Lipschitz 判别法 (Dini-Lipschitz criterion)
Dini-Lipschitz 定理 (Dini-Lipschitz theorem)
Dirichlet 型核 (kernel of Dirichlet type)
Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)

Fatou 引理 (**Fatou lemma**)

Fej´r 和 (Fejér sum)

Fejér 核 (Fejér kernel)

Fourier 级数 (Fourier series)

Fourier 系数 (Fourier coefficients)

Fubini 定理(*Fubini theorem*)

Gray 码 (Gray-code)

Haar 积分 (Haar integral)

Hadamard 序 W 函数 (W functions of Hadamard order)

Hadamard 变换 (Hadamard transform)

Hadamard 矩阵 (Hadamard matrix)

Hilbert 空间 (Hilbert space)

Hölder 不等式 (Hölder inequality)

Jordan 判别法 (Jordan criterion)

L 函数系 (L-function system)

Lebesgue 点 (L-point)

Lebesgue 控制收敛定理 (L-dominated convergence theorem)

Lebesgue 常数 (L-constant)

Levi 单调收敛定理 (Levi monotonic convergence theorem)

LS 积分 (LS-integral)

LS 测度 (LS-measure)

Minkowski 不等式 (Minkowski inequality)

p 进有理数 (p-adic rational number)

p 进连续性 (p-adic continuity)

p 进表示 (p-adic expression)

p 进移位的不变性 (p-adic shift invariance)

p 进群 (p-adic group)

p 进 W 函数 (p-adic W functions)

Paseval 公式 (Paseval formula)

Paseval-Plancherel 公式 (Paseval-Plancherel formula)

Peterson 方法（Peterson method）

R 函数的向量表示（vector expression of *R*-functions）

R 函数系（*R*-function system）

Riemann-Lebesgue 引理（Riemann-Lebesgue Lemma）

Riesz-Fisher 定理（Riesz-Fisher theorem）

Schwarz 不等式（Schwarz *inequality*）

Swich 方法（Swich method）

W 分析（*W* analysis, *W*-*F* analysis）

W 功率谱（*W* power spectral）

W 多项式（*W* polynomial）

W 级数（*W* series）

W 连续性（*W* continuity）

W 系数（*W* coefficients）

W 函数的向量表示（vector expression of *W*-functions）

W 函数系（*W*-functions system）

W 变式（*W*-transform）

W 变式表（table of *W*-transform）

W 展式（*W*-expansion）

W 矩阵（*W*-matrix）

W 最佳逼近多项式（*W*-best approximation polynomial）

W 谱（*W*-spectrum）

[General Information]
书名=沃尔什函数理论与应用
作者=郑维行　苏维宜　任福贤
页数=306
SS号=10069587
DX号=
出版日期=1983年04月第1版
出版社=上海科学技术出版社